Instituto Nacional José Miguel Carrera

Departamento de Matemática

SÉPTIMO Básico

Coordinador: Jorge Varela Sierra.

Segundo Semestre 2020

**GUÍA N°6 – RAZONES, PROPORCIONES Y PORCENTAJES.**

Nombre: \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ Curso: 7°\_\_\_ Fecha: \_\_\_/\_\_\_/\_\_\_\_\_

***¿QUÉ ES UNA RAZÓN?***

Una razón es la comparación entre dos cantidades. Se puede expresar como un cociente o una división.

*Ejemplo:* La razón entre **5** y **8** se puede escribir o . Se lee ***5 es a 8***.

Las dos cantidades que se comparan son los términos de la razón. El primer término se llama ***Antecedente*** y el segundo término se llama ***Consecuente***.

**VALOR DE UNA RAZÓN.**

Es el cociente obtenido entre el antecedente y el consecuente.

*Ejemplo:* El valor de la razón es .

Para comprobar si el valor de una razón es correcto, se debe multiplicar el valor de la razón por el consecuente. El producto obtenido debe ser igual al antecedente de la razón.

*Ejemplo:* Considerando el ejemplo anterior. (El valor de la razón multiplicado por el consecuente es igual al antecedente).

ACTIVIDAD 1.

En cada situación escribe la razón.

|  |  |
| --- | --- |
| 1. En una piscina hay 35 niñas y 45 niños, ¿Cuál es la razón entre niñas y niños? | RESPUESTA: |
| 1. En un curso de 36 estudiantes, 9 reprobaron. ¿Cuál es la razón entre aprobados y reprobados? | RESPUESTA: |
| 1. En un terreno, el área construida es de 120 m2 y el área no construida es de 80 m2. ¿Cuál es la razón entre el área construida y el área total del terreno? | RESPUESTA: |
| 1. En un campeonato de video juegos, un participante ganó 156 veces y perdió 104 veces. ¿Cuál es la razón entre las veces que perdió respecto al total? | RESPUESTA: |

ACTIVIDAD 2.

Calcula el valor de las siguientes razones.

|  |  |
| --- | --- |
| 1. 60 : 3 | RESPUESTA: |
| 1. 2 : 4 | RESPUESTA: |
| 1. 100 : 10 | RESPUESTA: |
| 1. 15 : 10 | RESPUESTA: |

**AMPLIFICACIÓN Y SIMPLIFICACIÓN DE UNA RAZÓN.**

**Amplificar una razón** consiste en multiplicar tanto antecedente como consecuente por un mismo número. La amplificación permite transformar una razón que ha sido expresada en términos fraccionarios en otra de términos enteros.

*Ejemplo:*

Sean, respectivamente, y el antecedente y consecuente de una razón

1. Se calcula el MCM de los denominadores del antecedente y consecuente.
2. Se amplifica antecedente y consecuente por el MCM calculado.

**Simplificar una razón** consiste en dividir tanto antecedente como consecuente por un mismo número. La simplificación permite trabajar con números más pequeños que los dados.

*Ejemplo:*

Sean, respectivamente, y el antecedente y consecuente de una razón . Si se simplifica en se obtiene:

**RAZÓN DIRECTA E INVERSA.**

Si una razón de la forma se define como razón directa, su razón inversa sería . Cabe notar que el producto entre una razón directa y su razón inversa es igual a la unidad.

ACTIVIDAD 3.

Reduce a términos enteros las siguientes razones.

|  |  |
| --- | --- |
|  | RESPUESTA: |
|  | RESPUESTA: |

ACTIVIDAD 4.

Simplifica las siguientes razones.

|  |  |
| --- | --- |
|  | RESPUESTA: |
|  | RESPUESTA: |

ACTIVIDAD 5.

Responde las siguientes preguntas.

|  |  |
| --- | --- |
| 1. ¿Cuál es la razón inversa de ? | RESPUESTA: |
| 1. ¿Cuál es la razón inversa de ? | RESPUESTA: |

***¿QUÉ ES UNA PROPORCIÓN?***

Sean las razones y , una proporción se define como la igualdad entre dos razones. Es decir:

Una proporción se lee “ es a como es a ”

*Ejemplo:* Dadas las razones y forman la proporción . Ambas razones tienen el mismo valor, que es . Se lee “ es a como es a ”

**EXTREMOS Y MEDIOS DE UNA PROPORCIÓN.**

Consideremos la proporción:

Los extremos de una proporción son el antecedente de la primera razón con el consecuente de la segunda razón. Es decir:

Los medios de una proporción son el consecuente de la primera razón con el antecedente de la segunda razón. Es decir:

**TEOREMA FUNDAMENTAL DE LAS PROPORCIONES.**

En toda proporción se cumple que el producto de los extremos es igual al producto de los medios. Es decir:

*Ejemplo:*

**PROPIEDADES DE LAS PROPORCIONES.**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Alternando los términos extremos: | Alternando los términos medios: | | Invirtiendo los términos de las razones: |
| Componiendo la proporción con respecto al antecedente de cada razón: | | Componiendo la proporción con respecto al consecuente de cada razón: | |
| Descomponiendo la proporción con respecto al antecedente de cada razón: | | Descomponiendo la proporción con respecto al consecuente de cada razón: | |

ACTIVIDAD 6.

Verifica si los siguientes pares de razones forman una proporción.

|  |  |
| --- | --- |
| 1. y | RESPUESTA: |
| 1. y | RESPUESTA: |
| 1. y | RESPUESTA: |
| 1. y | RESPUESTA: |

ACTIVIDAD 7.

Determina el valor de , de modo que se cumpla la proporción.

|  |  |
| --- | --- |
|  | RESPUESTA: |
|  | RESPUESTA: |
|  | RESPUESTA: |
|  | RESPUESTA: |

ACTIVIDAD 8.

Resuelve los siguientes problemas.

|  |  |
| --- | --- |
| 1. La suma de dos números es y están en la razón . Calcula el valor de cada uno de los números. | RESPUESTA: |
| 1. El perímetro de un rectángulo es . Además se sabe que el lar y ancho están en la razón . Calcula el valor del largo y ancho del rectángulo. | RESPUESTA: |
| 1. La diferencia de dos números es y están en la razón . Calcula el valor de cada uno de los números. | RESPUESTA: |
| 1. El dinero de dos personas están en la razón . La primera tiene más que la segunda. ¿Cuánto dinero tiene cada persona? | RESPUESTA: |
| 1. Las edades de Ana y Camila están en la razón . ¿Qué edad tiene cada una si la suma de sus edades es años? | RESPUESTA: |

**SERIE DE RAZONES O PROPORCIONES ITERADAS.**

Se le llama **Serie de Razones** a la igualdad de tres o más razones. Todas las razones de la serie tienen igual valor **k**.

 con k ∈ ℝ

Así mismo, en una serie de razones, la suma de los antecedentes es a la suma de los consecuentes en el mismo valor **k**.



ACTIVIDAD 9.

Resuelve en tu cuaderno los siguientes problemas,

1. Si donde . ¿Cuál es el valor de ?
2. Se desea repartir entre personas de modo que sus partes están en la razón . ¿Cuánto dinero recibe cada una de las personas?
3. ¿Cuáles son los números que están en la razón y que sumados dan ?
4. Calcular en la serie si .

**PROPORCIÓN DIRECTA.**

Dos variables son directamente proporcionales si al aumentar o disminuir una de ellas, la otra aumenta o disminuye el mismo número de veces. Es decir, si es directamente proporcional a , se cumple que el cociente entre con es igual a  constante de proporcionalidad.

Ejemplo 1:

1. De acuerdo a la información de la tabla se sabe que 1 saco de papas pesa 20 kg. ¿Cuánto pesan 8 sacos de papas?

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Nº de sacos de papa **(x)** | 1 | 2 | 3 | ... | 26 |
| Peso en kg **(y)** | 20 | 40 | 60 | ... | 520 |

Las magnitudes número de sacos de papas y peso en kg son directamente proporcionales ya que

La constante de proporcionalidad es . Ya que

Si , entonces

Sea (8 sacos de papas) entonces se tiene que

***Respuesta:*** 8 sacos de papas pesan 160 kg.

1. Un cargamento de papas que pesa 520 kg ¿Cuántos sacos de 20 kg se podrán hacer?

Si , entonces

Sea (520 kg de papas) entonces se tiene que

***Respuesta:*** 520 kg de papas se pueden almacenar en 26 sacos de 20 kg.

***Representación Gráfica.***

El gráfico de a una ***Proporcionalidad Directa*** es una ***línea recta que pasa por el punto de origen*** de un sistema de coordenadas cartesianas.

Del ejemplo 1 tenemos que:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Nº de sacos de papa **(x)** | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| Peso en kg **(y)** | 20 | 40 | 60 | 60 | 100 |



*Ejemplo 2:*

En 50 litros de agua de mar hay 1.300 gramos de sal. ¿Cuántos litros de agua de mar contendrán 5.200 gramos de sal?

Como en doble cantidad de agua de mar habrá doble cantidad de sal; en triple habrá triple, etc.

Las magnitudes cantidad de agua y cantidad de sal son directamente proporcionales. Si representamos por el número de litros que contendrá 5200 gramos de sal, y formamos la siguiente tabla:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Litros de agua | 50 | x |
| Gramos de sal | 1.300 | 5.200 |

Se verifica la proporción: 

Aplicando el Teorema Fundamental de las Proporciones resulta: 

Es decir:



**Grafica en el plano cartesiano la situación del ejemplo 2.**

ACTIVIDAD 10.

Resuelve los siguientes ejercicios de Proporción Directa.

1. A y B son dos variables directamente proporcionales. Completa la tabla.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| A | 16 | 58 |  | 40 |
| B | 2 |  | 3 |  |
| Constante de proporcionalidad |  |  |  | 8 |

1. Francisco tiene una estufa a parafina que gasta 2 litros cada 7 horas de encendida. Completa la tabla y grafica.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Litros |  | 1 | 2 | 3 |  | 5 | 6 |  |
| Horas | 0 |  | 7 |  | 14 |  |  | 24,5 |

1. Un grupo de 3 amigos ha decidido comprar una bebida para cada uno. Cada bebida cuesta $500. Completa la tabla considerando que el número de bebidas varía, luego grafica.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Cantidad de bebidas | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| Precio total ($) |  |  |  |  |  |

1. La ecuación , donde representa los m2 de superficie y representa los galones de pintura, corresponde al rendimiento de la pintura en galones con relación al área que ésta puede cubrir.

* ¿Cuántos m2 se puede pintar con 2, 3, 4 y 6 galones de pintura?
* ¿Serán suficientes 2 galones de pintura para pintar 50 m2?

1. Una máquina fotocopia 80 páginas en 4,2 minutos.

* ¿Representa esta situación una variación directamente proporcional? Justifica tu respuesta.
* Calcula el cociente tiempo/cantidad de páginas.
* ¿Qué representa el valor k en este problema?
* ¿Cuánto demora la página en fotocopiar una página?
* Calcula, utilizando el valor k, cuánto se demoraría la máquina en fotocopiar 4 páginas, 40 páginas y 100 páginas.
* Escribe la ecuación (y = \_\_ · x) que describe la variación entre el número de páginas (x) y el tiempo que demora la máquina (y).

1. En el plano de una ciudad, se indica que está dibujado a escala 1cm : 10.000 m. ¿Qué longitud es representada en el plano si la distancia es de 2.500 m?
2. Se sabe que a y b representan números directamente proporcionales. Si b=20 cuando a=5 . ¿Cuál es el valor de b si a=30?
3. Una diapositiva mide 3,5cm de largo y 2,5cm de ancho. Si un proyector da una imagen de ella que mide 80cm de ancho. ¿Cuántos centímetros de largo medirá la imagen proyectada?
4. Se necesita construir una pared de 25 metros cuadrados. ¿Cuántos ladrillos se necesitan si para un metro cuadrado se utilizan 24 ladrillos?
5. En una panadería 1kg de pan vale $500. Completa la siguiente tabla y grafica la información.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Peso del pan en kg (y) | Dinero a pagar en $ (x) | Constante de Proporcionalidad (k=y/x) |
| 1 | 500 |  |
|  | 250 |  |
| ¼ |  |  |
|  | 375 |  |
| 2 |  |  |
|  | 1500 |  |
|  | 2000 |  |
| 5 |  |  |

**PROPORCIÓN INVERSA.**

Dos variables son Inversamente proporcionales si al aumentar o disminuir una de ellas, la otra disminuye o aumenta el mismo número de veces. Es decir, si es inversamente proporcional a , se cumple que el producto entre con es igual a constante de proporcionalidad.

*Ejemplo 1:*

Si 3 hombres necesitan 24 días para hacer un trabajo, ¿cuántos días emplearán 18 hombres para realizar el mismo trabajo?

En este caso a doble número de trabajadores, el trabajo durará la mitad; a triple número de trabajadores, el trabajo durará la tercera parte, etc. Por tanto, las magnitudes son inversamente proporcionales (también se dice que son indirectamente proporcionales) .

Formamos la tabla:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Hombres | 3 | 6 | 9 | ... | 18 |
| Días | 24 | 12 | 8 | ... | ? |

Vemos que los productos 3 ⋅ 24 = 6 ⋅ 12 = 9 ⋅ 8 = 72 Por tanto 18 ⋅ x = 72

O sea que los 18 hombres tardarán 4 días en hacer el trabajo

Nótese que aquí la constante de proporcionalidad, que es k=72, se obtiene multiplicando las magnitudes y que su producto será siempre igual.

Si entonces las expresiones que representan la situación son:

**Representación gráfica**

La representación gráfica de esta función son puntos que pertenecen a una curva, llamada *hipérbola*.

Del ejemplo 1 se tiene que:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Hombres | 1 | 3 | 6 | 9 | 12 | 15 |
| Días | 72 | 24 | 12 | 8 | 6 | 4 |

*Ejemplo 2:*

Un ganadero tiene forraje suficiente para alimentar 220 vacas durante 45 días. ¿Cuántos días podrá alimentar con la misma cantidad de forraje a 450 vacas?

Vemos que con el mismo forraje, si el número de vacas se duplica, tendrá para la mitad de días; a triple número de vacas, tercera parte de días, etc. Por tanto, son magnitudes inversamente proporcionales.

x = número de días para el que tendrán comida las 450 vacas

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Nº de vacas | 220 | 450 |
| Nº de días | 45 | x |

Se cumple que: 220 por 45 = 450 por x, de donde 

ACTIVIDAD 11.

Resuelve los siguientes ejercicios de Proporción Directa.

1. A y B son dos variables inversamente proporcionales. Completa la siguiente tabla.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| A | 9 |  | 4 | 6 |
| B | 4 | 3 |  |  |
| Constante de proporcionalidad |  |  |  | 36 |

1. Un ganadero tiene 500 animales y forraje para alimentarlos durante 80 días. Él desea construir una tabla de valores y un gráfico que le permitan determinar, en forma rápida, para cuántos días le alcanza el alimento si la población de animales varía.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Nº animales |  |  |  |  |  |
| Días |  |  |  |  |  |

1. Un profesor compra un paquete de 120 dulces para premiar la resolución de problemas de ingenio matemático. Reparte los caramelos entre los alumnos que lo resuelven bien. Completa la tabla y construye el gráfico

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Cantidad de alumnos | 2 | 3 | 5 | 8 | 10 | 15 |
| Número de caramelos |  |  |  |  |  |  |

1. Las variables a y b representan números inversamente proporcionales. Si a=3 cuando b=15, ¿Cuál es el valor de b si a=9?
2. Dos ruedas dentadas están engranadas. Tienen 12 y 24 dientes respectivamente. ¿Cuántas vueltas habrá dado la segunda cuando la primera ha dado 144 vueltas?
3. Cuatro llaves llenan un estanque en 3 horas. ¿Cuánto se demoran 6 llaves en llenar el mismo estanque?
4. Un tren recorre en 3 horas la distancia que hay entre dos ciudades con una velocidad de 80 km/hr. Para que recorra el mismo trayecto en 2,5 horas, ¿A qué velocidad debe ir?
5. Cinco motores consumen 7.200 litros de combustible en 42 horas. ¿Para cuántas horas alcanzará esa misma cantidad de combustible si funcionan solo 3 motores?

**VARIACIONES PORCENTUALES (PORCENTAJES).**

* Corresponde a una razón de consecuente 100 y se denota por %.
* x% corresponde a x partes de un total de 100 iguales.
* Un porcentaje puede expresarse como razón o número decimal equivalente.

*El porcentaje corresponde a un caso particular de proporcionalidad directa,*

*donde uno de los términos de la proporción es 100, es decir:*



*Ejemplo:*

El 15% de 200 se expresa así: 





ACTIVIDAD 12.

1. Expresa como fracción cada porcentaje:

|  |  |
| --- | --- |
| a) 20% | e) 100% |
| b) 12% | f) 150% |
| c) 60% | g) 1/2 % |
| d) 75% | h) 3/5% |

1. Expresa como porcentaje los siguientes decimales:

|  |  |
| --- | --- |
| a) 0,12 | e) 3 |
| b) 0,72 | f) 1/10 |
| c) 0,7 | g) |
| d) 1,7 | h) 3/4 |

ACTIVIDAD 13.

Resuelve los siguientes ejercicios y marca con una X la alternativa correcta.

1. Juan tiene que pagar $ 90.000. Si le rebajan el 5% de su deuda, ¿cuánto tiene que pagar todavía?

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| a) $ 450 | b) $ 4.550 | c) $ 85.500 | d) $ 89.500 | e) $ 94.550 |

1. Un metro de tela me cuesta $ 1.500. ¿A cómo tengo que venderlo para ganar el 20% de lo que costó?

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| a) $ 1.800 | b) $ 1.200 | c) $ 1.300 | d) $ 1.000 | e) $ 350 |

1. Pedro tenía $ 80.000. Si gastó el 20% y dio a su hermano el 15% del resto, ¿cuánto le queda?

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| a) $ 16.000 | b) $ 28.000 | c) $ 52.000 | d) $ 54.400 | e) $ 78.000 |

1. De los 125 alumnos de un colegio, el 36% son damas. ¿Cuántos son varones?

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| a) 89 | b) 80 | c) 45 | d) 36 | e) 25 |

1. Una camisa me costó $ 10.500, con lo que gasté el 25% de mi dinero. ¿Cuánto dinero tenía?

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| a) $ 2.625 | b) $ 13.125 | c) $ 32.525 | d) $ 40.500 | e) $ 42.000 |
|  |  |  |  |  |

1. De las 240 fichas que tiene un niño, 48 son rojas. ¡Cuál es el porcentaje de fichas rojas?

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| a) 5% | b) 10% | c) 15% | d) 20% | e) 25% |

1. ¿Qué porcentaje de rebaja se hace en una deuda de $ 4.500 que se reduce a $ 3.600.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| a) 80% | b) 60% | c) 40% | d) 20% | e) 10% |

1. Habiendo salido el 84% de los alumnos de un colegio, permanecen en el mismo 20 alumnos. ¿Cuántos alumnos salieron del colegio?

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| a) 168 | b) 105 | c) 100 | d) 84 | e) 72 |

1. Tenía $ 350 y pagué $ 140 que debía. Lo que me queda, ¿qué porcentaje es de lo que tenía?

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| a) 60% | b) 55% | c) 50% | d) 45% | e) 40% |

1. ¿A cómo hay que vender lo que ha costado $ 680 para ganar el 15% de la venta?

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| a) $ 700 | b) $ 702 | c) $ 720 | d) $ 750 | e) $ 782 |
|  |  |  |  |  |

1. Compré 90 libros y vendí el 60% de ellos. ¿Cuántos libros me quedan?

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| a) 54 | b) 45 | c) 36 | d) 32 | e) 30 |

1. Un hombre al morir dispone que sus ahorros consistente en 20.000 dólares, se reparta en 35% a su hermano mayor, el 40% del resto a su hermano menor y lo restante a su ahijado. ¿Cuántos dólares le correspondió a este último?

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| a) 150 | b) 1500 | c) 7.000 | d) 7.800 | e) 8.000 |

1. ¿Cuál es el 10% del 15% de 4.000?

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| a) 1.000 | b) 400 | c) 100 | d) 60 | e) 6 |

1. ¿Cuánto minutos son el 35% de una hora?

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| a) 2 | b) 21 | c) 35 | d) 1/35 | e) 7/12 |

1. Un cortador de pasto cobraba $ 20.000 por su trabajo. Ahora pedirá $ 24.000, ¿en qué porcentaje aumentó su tarifa?

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| a) 120% | b) 80% | c) 60% | d) 40% | e) 20% |

1. Una persona gastó $ 14.400, lo que equivale al 25% de su dinero. ¿Cuánto dinero tenía?

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| a) $ 72.000 | b) $ 57.600 | c) $ 45.000 | d) $ 25.600 | e) $ 3.600 |

1. Un artículo se sube de $ 1.500 a $ 1.800. ¿Cuál es el porcentaje de alza?

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| a) 5% | b) 10% | c) 15% | d) 20% | e) 25% |

1. Si a 80 se le resta el 80% de su mitad. ¿Cuánto se obtiene?

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| a) 80 | b) 64 | c) 48 | d) 32 | e) 16 |

1. Si la diferencia entre el 72% y el 57% de un número es 45. ¿Cuál es el número?

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| a) 450 | b) 300 | c) 250 | d) 150 | e) 100 |

1. Si Gonzalo tuviese un 16% menos de la edad que tiene, tendría 21 años. ¿Cuál es la edad actual de Gonzalo?

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| a) 24 años | b) 25 años | c) 26 años | d) 27 años | e) 28 años |

1. Un niño repartió 40 dulces entre sus amigos. A Juan le dio 2/5 del total, a Mario el 25% del resto y a Claudio el 50% del nuevo resto. ¿Con cuántos dulces se quedó el niño?

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| a) 9 | b) 7 | c) 5 | d) 4 | e) 3 |