Guía # 0
Abril de 2020

1. Números Complejos

Ejercicios varios
Coordenadas polares: **otra forma de ver el plano complejo**
Colaborador:*Profesor Luis Arancibia M.*

Introducción

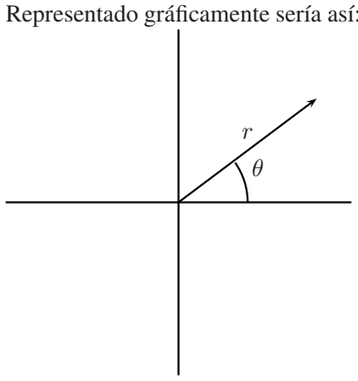
Todo punto del plano complejo (plano cartesiano) puede representarse con sus coordenadas $(x,\, y)$, que son los puntos de cada uno de los ejes donde cortan las dos perpendiculares a los mismos que podemos trazar desde la propia representación del punto (esto es, las coordenadas que todos conocemos desde siempre). Estas coordenadas se denominan **coordenadas rectangulares o cartesianas**.

Esta forma de asignar coordenadas a los puntos del plano no es la única (de hecho en muchas ocasiones ni siquiera es la más aconsejable). Vamos a ver otra manera de asignar coordenadas a los puntos del plano: las *coordenadas polares*

Coordenadas polares

A todo punto P del plano cuyas coordenadas rectangulares son $(x,\, y)$ podemos asignarle las siguientes coordenadas: r = distancia del origen de coordenadas $(0,\, 0)$ al punto
θ = ángulo desde el semieje positivo del eje X al segmento que une el origen de coordenadas con P

Representado gráficamente sería así:



Teniendo en cuenta esta definición se tiene que $r \geq 0$ y $\theta \in [0,\, 2\pi]$ (se puede definir también el ángulo en cualquier intervalo).

Las ecuaciones que relacionan las coordenadas rectangulares con las polares son las siguientes:

Rectangulares en función de las polares

$$x = r\cos(\theta)$$
$$y = r\,\mathrm{sen}(\theta)$$

Polares en función de las rectagulares

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$\theta = \mathrm{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)$$

Sobre la expresión del ángulo en función de las coordenadas rectangulares se debe realizar un apunte importante. La función arctg(x) da como resultado dos valores distintos, dos ángulos en cuadrantes opuestos (primero y tercero o segundo y cuarto). Por tanto hay veces en las que al calcular el ángulo puede que obtengamos un resultado incorrecto (puede que nos aparezca el ángulo del cuadrante incorrecto). La regla para el ángulo es la siguiente:

Calculamos el ángulo θ (con la calculadora o con la ayuda de una tabla de razones trigonométricas) y miramos los signos de las coordenadas $(x,\, y)$ para ver en qué cuadrante está situado el punto P . Si el ángulo que hemos obtenido está en el mismo cuadrante que P el ángulo obtenido es el correcto. Si no es así sumamos o restamos π al ángulo que nos ha salido cuidando que el resultado de esa suma o resta quede dentro del intervalo $[0,\, 2\pi]$. Por ejemplo, si obtenemos el ángulo $\frac{\pi}{3}$ (que está en el primer cuadrante) y vemos que nuestro punto está en el tercer cuadrante (coordenadas $(x,\, y)$ negativas) sumamos π al ángulo obtenido, resultando entonces el ángulo buscado que es $\theta = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$ (si en vez de sumar restáramos trabajaríamos con el sentido negativo).

Aplicaciones

Las coordenadas polares son enormemente interesantes al estudiar fenómenos relacionados con distancias y ángulos (a grandes rasgos se podría decir que interesan a la hora de estudiar conceptos relacionados con elipses y circunferencias). Vamos a enumerar unos cuantos:

- *Cálculo de límites dobles*: a la hora de calcular un límite doble el método definitivo es el método del paso a coordenadas polares. Se pasa con ellas a un límite dependiente de una única variable, r(en concreto $r \to 0$), utilizando las ecuaciones de cambio de rectangulares a polares y se estudia si dicho límite depende del ángulo θ . Si existe tal dependencia el límite inicial existe y su valor es el obtenido en el límite en polares.

- *Ecuaciones de curvas*: las coordenadas polares simplifican la expresión de las ecuaciones de ciertas curvas. Por ejemplo, la circunferencia de centro $(0,\,0)$ y radio 3 tiene a como ecuación en coordenadas rectangulares $x^2+y^2=9$ y a $r=3$ como ecuación en coordenadas polares.

- *Forma polar de un número complejo*: todo punto del plano con coordenadas rectangulares $(x,\,y)$ es la representación gráfica del número complejo $z=x+iy$ (esta forma de representar un número complejo se denomina forma binómica de z). Pasando a polares obtenemos el **módulo**(r) y el **argumento** (θ) de z y con ello la forma polar para z es $r\theta$
  Expresar los números complejos en su forma polar simplifica mucho ciertas operaciones, como son la multiplicación, la división y el cálculo de raíces n-ésimas.

- **Cálculo de integrales dobles**: cuando la región de integración de una integral doble es una circunferencia o una elipse (o parte de alguna de ellas) pasar a coordenadas polares es una opción muy interesante ya que simplifica mucho el cálculo de los límites de integración de la misma.

- **Navegación marítima**: como la navegación marítima se basa en ángulos y distancias la utilización de las coordenadas polares simplifica mucho los cálculos necesarios para realizar dicha actividad.

- **Cálculos orbitales**: las razones son las mismas que en el caso anterior.

Un toque de humor
Las coordenadas polares también sirven para darle un toque de humor matemático a nuestra vida:

¿Qué es un oso polar? Un oso rectangular al que se le ha aplicado un cambio de coordenadas.

Es una explicación simple y reducida del chiste de la sección de Humor

Se ha incluído este capítulo con el objetivo de motivar en parte el estudio de los números complejos, unidad que una reforma inteligente los dejó fuera de los programas de Enseñanza Media. Damos Gracias por ser restaurados y vueltos a colocar de donde nunca debieron salir.

Ejercicios y Problemas

1. Dados $z_1=1-2i$ y $z_2=-2+i$, obtenga el complejo dado por:
   a) z_1+z_2, b) z_2-z_1, c) $z_1\cdot z_2$, d) $z_1:z_2$, e) z_1^3 f) $\sqrt[5]{z_2}$

   a lo menos de dos modos distintos

2. Factorizar el polinomio $p(x)=x^2-2x+2$ en el conjunto de los números complejos.

3. Deje las expresiones con denominador un número real:
   a) $\dfrac{1}{5-i\sqrt{3}}$ b) $\dfrac{b+iy}{b-iy}-\dfrac{b-iy}{b+iy}$ c) $\dfrac{(a+i)^3-(a-i)^3}{(a+i)^2-(a-i)^2}$ d) $\dfrac{1+i}{1+2i}+\dfrac{1-i}{1-2i}$

   e) $\dfrac{69-7\sqrt{15}+(\sqrt{3}-6\sqrt{5})i}{3-(\sqrt{3}-3\sqrt{5})i}$

4. Anote como complejo las siguientes expresiones:

   a) $\dfrac{\sqrt{3}-i\sqrt{5}}{2\sqrt{3}-i\sqrt{5}}$ b) $\dfrac{(1+i)^3}{4-i}$ c) $\sqrt{-7+24i}$ d) $\sqrt{6+i\sqrt{13}}$

5. Escriba como polinomio con coeficientes reales:

   a) $(x-1-i\sqrt{2})(x-2-i\sqrt{3})(x-1+i\sqrt{2})(x-2+i\sqrt{3})$

   b) $(x-\sqrt{-4})(x+1-\sqrt{2})(x+1+\sqrt{2})(x+\sqrt{-4})$

6. Determine los valores de x e y para satisfacer la ecuación:

   $(2-5i)x+(1+3i)y-8+9i=0$

7. ¿Qué valores han de tener r y α para que:

   $1 + rcis\,\alpha = 2cis\,60°$

8. Simplificar:

   $$\frac{cis\,(-2\alpha)cis^2(\beta)}{cis\,(\alpha+\beta)} + \frac{cis\,(2\alpha)cis^2\,(-\beta)}{cis\,(-(\alpha+\beta))}$$

9. Si 1, α y α^2 son las tres raíces cúbicas de la unidad, demuestre que:

   a) $(1+\alpha^2)^4 = \alpha$ b) $(1-\alpha)(1-\alpha^2)(1-\alpha^4)(1-\alpha^5) = 9$

10. Determine los lugares geométricos correspondientes a cada ecuación en $\mathbf{C}$, representadas en el diagrama de Argand:

    a) $|z| = 3$ b) $|z-1| = 3$ c) $|z-2| + |z| = 4$ d) $|z-2| - |z| = 1$

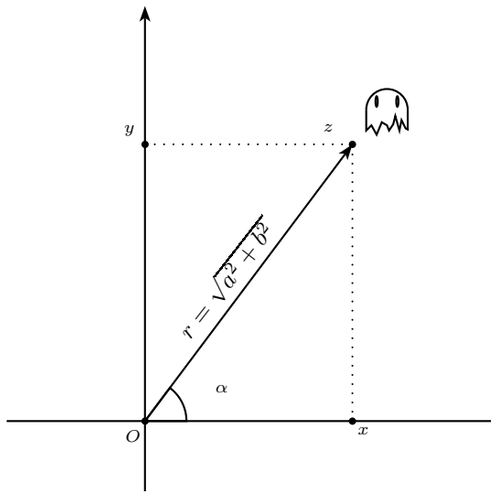
    e) $|z-i| + |z+i| = 5$

2. Nociones generales

Un número complejo es un número que tiene dos componentes, uno de ellos un número real y el otro componente es un número imaginario. Sus notaciones son:

$$z = a + ib = (a,\, b) = r\mathrm{cis}\alpha = \mathrm{r}\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$$

si bien, todas ellas representan a un mismo número, no se ocupan siempre por igual, cada notación tiene su uso particular y se prefiere una de ellas según el contexto.



Este sistema coordenado no es real, se denomina diagrama de Argand. Las abscisas son números reales y las ordenadas números imaginarios.
Del complejo z, se llama afijo tanto al punto como a la flecha que lo representan

$$\alpha = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{b}{a}\right) = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{y}{x}\right)$$

$x = r\cos\alpha$
$y = r\,\mathrm{sen}\,\alpha$
$z = r\mathrm{cis}\alpha = r\cos\alpha + i\cdot r\,\mathrm{sen}\,\alpha = a + ib$
$z = r\mathrm{cis}\alpha = r\mathrm{cis}(\alpha + 2k\pi);\, k \in \mathbb{Z}$

El conjunto $\mathbb{C}$ de los números complejos satisface la estructura de cuerpo con las operaciones adición y multiplicación de complejos.
Las operacions se definen del siguiente modo:
Sean $z_1 = a + ib$ y $z_2 = c + id$, entonces $z_1 + z_2 = (a+c) + i(b+d)$ y $z_1 \cdot z_2 = (ac - bd) + i(ad + bc)$
La multiplicación nada tiene de mágica ni misteriosa ya que, $i^2 = -1$ y lo que se realiza es la multiplicación de dos binomios.

Argand fijó este diagrama para representar números complejos, indicando que multiplicar por i equivale a hacer un giro en $\dfrac{\pi}{2}$ radián en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj y cuando se multiplican dos números complejos dados de modo trigonométrico, se multiplican los módulos y se suman los argumentos (ángulos). La multiplicación de los módulos se desarrolla según el teorema de Thales, si el trabajo se hace geométricamente.

Puede probar que $(\mathbb{C},\, +,\, \cdot)$ es cuerpo.

Algunos ejercicios:

1. Dados z_1 y z_2 dos complejos, obtenga z de modo que $z_1 \cdot z = z_2$
   Si hacemos las operaciones indicadas, vamos a tener que
   $x_1 \cdot x - y_1 \cdot y = x_2$ y $y_1 \cdot x + x_1 \cdot y = y_2$ conforman un sistema de ecuaciones y se arregla así:

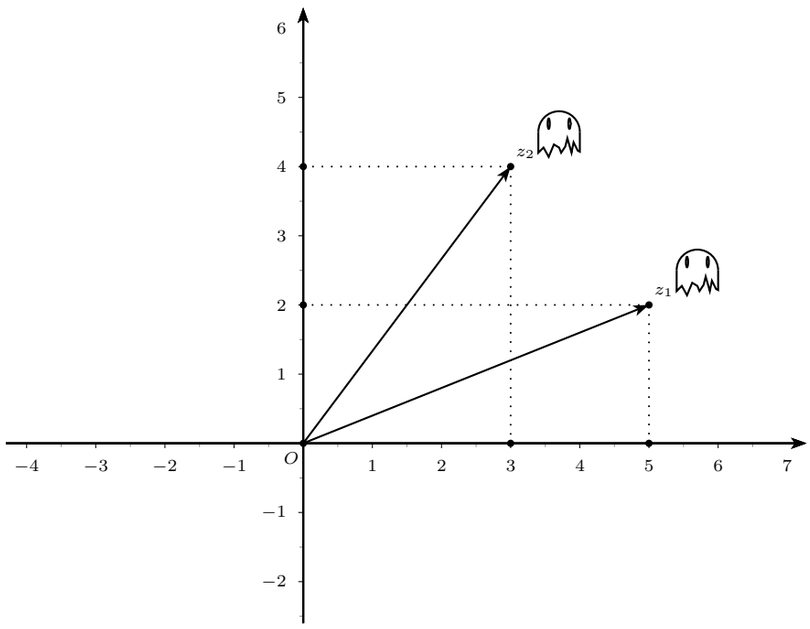
$$\left.\begin{array}{c}(x_1^2+y_1^2)x = x_1x_2 + y_1y_2 \\ (x_1^2+y_1^2)y = -y_1x_2 + x_1y_2\end{array}\right\}$$

   Si $x_1^2 + y_1^2 \neq 0$, entonces será posible obtener z y

$$z = \frac{z_2}{z_1} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + i(-y_1x_2 + x_1y_2)}{x_1^2 + x_2^2}$$

2. Escriba de la forma $x + iy$ el resultado de operar
   $\sqrt{2}\text{cis}\alpha \cdot \text{cis}\beta$, donde $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$, $0 < \beta < \dfrac{\pi}{2}$, $\alpha = \text{arc tg}\, 2$ y $\beta = \text{arc tg}\, 3$

3. Problema, usando regla y compás, multiplique y divida los siguientes complejos en el orden dado:



4. Siendo $a + ib = c$ y $x + iy = z$ dos números complejos,
   donde a, b, x e y son números reales. Observe que:
   $|z - c| = [(x-a)^2 + (y-b)^2]^{\frac{1}{2}}$ corresponde a la distancia que hay entre los puntos c y z.
   Si asumimos que c es un número fijo y z un número variable; tomemos a ρ como una constante. La ecuación

$$|z - c| = \rho$$

   indica que cada punto z se encuentra a una misma distancia ρ del punto fijo c. Por lo cual, la ecuación representa a una circunferencia.
   También podemos considerar $|z - c| < \rho$, la cual representa a la superficie del círculo cuya circunferencia es $|z - c| = \rho$.

   a) Describa geométricamente $|3z + 2| < 1$

   b) Describa geométricamente $|2z - 3| > 3$

   c) $\mathbf{I}z > 3$

   d) $\mathbf{R}(1 + i)z < 0$

   e) $|z - 1| + |z + 1| \leq 4$

   f) $|z - \rho| \leq \rho + \mathbf{R}z \;\; p > 0$

5. Suponiendo que $\rho > 0$ y $\rho \neq 1$, determine a que representa $\left|\dfrac{1-z}{1+z}\right| = \rho$
   ¿que va a representar si $\rho = 1$?

6. Determine el conjunto de puntos que satisface $\mathbf{I}\left(z + \dfrac{1}{z}\right) = 0$

7. Trazar sobre cada lado de un cuadrilátero arbitrario dado, un cuadrado externo medida igual al lado el centro de dicho lado. Trazar el segmento que une el centro de uno de los cuadrados con el centro del cuadrado trazado por el lado opuesto. Utilizando complejos, demostrar que los dos segmentos que se obtienen tienen la misma longitud y además son perpendiculares. (Obtenga los cuatro centros, siendo $2a$, $2b$, $2c$ y $2d$ los vértices del cuadrilátero dado).

8. Utilizando números complejos, pruebe que el segmento que une los puntos medios dos lados de un triángulo es paralelo al tercer lado y mide la mitad de este

9. Utilizando numéros complejos, demostrar que las tres medianas (transversales de gravedad) de un triángulo concurren a un punto único y este punto divide a cada mediana en razón $2:1$

3. Ejemplo de prueba

1. Sean $z_1 = (x-1)+2i$ y $z_2 = 2x+(y-3)i$ dos números complejos. Si $z_1 = z_2$, entonces:

   A) $x+y=4$
   B) $x \cdot y = 5$
   C) $x-y=-4$
   D) $x=2y$
   E) $y=2x$

2. ¿Con cuál valor de m el producto $(2+mi)\cdot(3+i)$ es un imaginario puro?

   A) 5
   B) 6
   C) 7
   D) 8
   E) 10

3. i^{14} es:

   A) $-i$
   B) i
   C) -1
   D) 1
   E) $14i$

4. $(1+i)^2-(1-i)^3 =$

   A) $1+i$
   B) $2+i$
   C) $2+4i$
   D) $4-2i$
   E) $-1-i$

5. El complejo que se obtiene al desarrollar $\left[\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right]^6$ equivale a

   A) $6i$
   B) i
   C) $-i$
   D) $-6i$
   E) -1

6. Sean x e y dos números reales tales que $12 - x + (4 + y)i = y + xi$, entonces el conjugado del número complejo $z = x + yi$ es

   A) $4 + 8i$
   B) $4 - 8i$
   C) $8 + 4i$
   D) $8 - 4i$
   E) $-8 - 4i$

7. Tenemos que $z = 2 - i$, entonces el recíproco de z^2 es:

   A) $\frac{5 + 4i}{41}$
   B) $\frac{2 + i}{5}$
   C) $\frac{4 - 3i}{25}$
   D) $\frac{3 + 4i}{25}$
   E) $\frac{3 - 4i}{25}$

8. La diferencia entre la mayor raíz y la menor raíz de la ecuación $(2x - 45)^2 - (x - 21)^2 = 0$ es:

   A) 2
   B) 3
   C) 4
   D) 5
   E) 6

9. El número natural n para el cual $(2i)^n + (1 + i)^{2n} = 16i$ es

   A) $n = 6$
   B) $n = 3$
   C) $n = 7$
   D) $n = 4$
   E) No existe n en esas condiciones

10. El módulo del número complejo $(1 + 3i)^4$ es:

    A) 256
    B) 100
    C) 81
    D) 64
    E) 16

11. Si $z = 2 + 3i$, entonces $i\overline{z} =$

    A) $3 + 2i$
    B) $2 - 3i$
    C) $-i$
    D) i
    E) Otro complejo

12. Si $z = 2 - 5i$; entonces $\frac{z}{i} =$

    A) $2 + 5i$
    B) $-5 - 2i$
    C) $-5 + 2i$
    D) $-2 - 5i$
    E) -5

13. Si $z = 3 + 4i$; entonces $-iz =$

    A) $\overline{z}$
    B) $-\overline{z}$
    C) $4 - 3i$
    D) $4 + 3i$
    E) $-4 - 3i$

14. Si $z = 1 - i$; el valor de $\frac{2}{z} =$

    A) $-1 - i$
    B) $-1 + i$
    C) 1
    D) $\overline{z}$
    E) $-\overline{z}$

15. Cuando $z = 2 - i$, el valor de $i^3 z$ es

    A) $\overline{z}$
    B) $2 - 2i$
    C) $-1 + 2i$
    D) $-1 - 2i$
    E) $1 - 2i$

16. $z = 1 - i$, entonces $z^2 + i$ es

    A) $2 + i$
    B) $-i$
    C) i
    D) $2i$
    E) $2 - i$

17. Obtener $z^3 - 3i$ sabiendo que $z = 1 + i$

    A) $4 - i$
    B) $-2 + i$
    C) $-2 - i$
    D) $4 - 2i$
    E) Ninguna anterior

18. Si $z = i$, el valor de $\frac{2 - i}{z} + 2z$ es:

    A) 1
    B) -1
    C) $-1 - 2i$
    D) $-1 - i$
    E) $1 - 2i$

19. Si $z^2 - 2z + 4 = 0$, entonces $(z-1)^2$ vale:

    A) $(1 + i\sqrt{3})^2$
    B) $(1 - i\sqrt{3})^2$
    C) 3
    D) $2\sqrt{3} - 1$
    E) -3

20. Si $a = 1 + i$ y $b = 1 - i$, entonces $a^{52} \cdot b^{51} =$

    A) a
    B) b
    C) $2a$
    D) $2b$
    E) Ninguna anterior

21. El conjugado de $\dfrac{1+i}{i}$ es:

    A) $\dfrac{1-i}{i}$
    B) $-\dfrac{1+i}{i}$
    C) $1 + i$
    D) $\dfrac{i}{1+i}$
    E) $(1-i)^{-1}$

22. Si $z + \dfrac{1}{z} = -1$, entonces $|z| =$

    A) $\dfrac{1}{2}$
    B) 0
    C) 1
    D) 2
    E) 4

23. El número complejo $z = a + bi$ es tal que $\left|\dfrac{z-i}{z-1}\right| = 1$, entonces

    A) $a = -b$
    B) $a = b$
    C) $a = 2b$
    D) $a = 3b^3$
    E) $a = -7b$

24. Si $z_1 = (2, -1)$ y $z_2 = (3, x)$ son dos números complejos y además se sabe que $z_1 \cdot z_2$ es un número real, entonces x es

    A) -6
    B) $-\dfrac{3}{2}$
    C) $\dfrac{3}{2}$
    D) 6
    E) 3

25. Si $z = \dfrac{1-i}{1+i}$, entonces $z^{2012} =$

    A) 1
    B) -1
    C) i
    D) $-i$
    E) $2i$

4. Test: Complejos

1. Sean $z_1 = (x-1) + 2i$ y $z_2 = 2x + (y-3)i$ dos números complejos. Si $z_1 = z_2$, entonces:

   A) $x + y = 4$
   B) $x \cdot y = 5$
   C) $x - y = -4$
   D) $x = 2y$
   E) $y = 2x$

2. ¿Con cuál valor de m el producto $(2 + mi) \cdot (3 + i)$ es un imaginario puro?

   A) 5
   B) 6
   C) 7
   D) 8
   E) 10

3. i^{14} es:

   A) $-i$ B) i C) -1 D) 1 E) $14i$

4. $(1+i)^2 - (1-i)^3 =$

   A) $1 + i$
   B) $2 + i$
   C) $2 + 4i$
   D) $4 - 2i$
   E) $-1 - i$

5. El complejo que se obtiene al desarrollar $\left[\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right]^6$ equivale a

   A) $6i$
   B) i
   C) $-i$
   D) $-6i$
   E) -1

6. Sean x e y dos números reales tales que $12 - x + (4 + y)i = y + xi$, entonces el conjugado del número complejo $z = x + yi$ es

   A) $4 + 8i$
   B) $4 - 8i$
   C) $8 + 4i$
   D) $8 - 4i$
   E) $-8 - 4i$

7. Tenemos que $z = 2 - i$, entonces el recíproco de z^2 es:

   A) $\frac{5 + 4i}{41}$
   B) $\frac{2 + i}{5}$
   C) $\frac{4 - 3i}{25}$
   D) $\frac{3 + 4i}{25}$
   E) $\frac{3 - 4i}{25}$

8. La diferencia entre la mayor raíz y la menor raíz de la ecuación $(2x-45)^2-(x-21)^2=0$ es:

   A) 2
   B) 3
   C) 4
   D) 5
   E) 6

9. El número natural n para el cual $(2i)^n+(1+i)^{2n}=16i$ es

   A) $n=6$
   B) $n=3$
   C) $n=7$
   D) $n=4$
   E) No existe n en esas condiciones

10. El módulo del número complejo $(1+3i)^4$ es:

    A) 256
    B) 100
    C) 81
    D) 64
    E) 16

11. Si $z=2+3i$, entonces $i\overline{z}=$

    A) $3+2i$
    B) $2-3i$
    C) $-i$
    D) i
    E) Otro complejo

12. Si $z=2-5i$; entonces $\frac{z}{i}=$

    A) $2+5i$
    B) $-5-2i$
    C) $-5+2i$
    D) $-2-5i$
    E) -5

13. Si $z=3+4i$; entonces $-iz=$

    A) $\overline{z}$
    B) $-\overline{z}$
    C) $4-3i$
    D) $4+3i$
    E) $-4-3i$

14. Si $z=1-i$; el valor de $\frac{2}{z}=$

    A) $-1-i$
    B) $-1+i$
    C) 1
    D) $\overline{z}$
    E) $-\overline{z}$

15. Cuando $z=2-i$, el valor de i^3z es

    A) $\overline{z}$
    B) $2-2i$
    C) $-1+2i$
    D) $-1-2i$
    E) $1-2i$

16. $z = 1 - i$, entonces $z^2 + i$ es

    A) $2 + i$
    B) $-i$
    C) i
    D) $2i$
    E) $2 - i$

17. Obtener $z^3 - 3i$ sabiendo que $z = 1 + i$

    A) $4 - i$
    B) $-2 + i$
    C) $-2 - i$
    D) $4 - 2i$
    E) Ninguna anterior

18. Si $z = i$, el valor de $\dfrac{2 - i}{z} + 2z$ es:

    A) 1
    B) -1
    C) $-1 - 2i$
    D) $-1 - i$
    E) $1 - 2i$

19. Si $z^2 - 2z + 4 = 0$, entonces $(z - 1)^2$ vale:

    A) $(1 + i\sqrt{3})^2$
    B) $(1 - i\sqrt{3})^2$
    C) 3
    D) $2\sqrt{3} - 1$
    E) -3

20. Si $a = 1 + i$ y $b = 1 - i$, entonces $a^{52} \cdot b^{51} =$

    A) a
    B) b
    C) $2a$
    D) $2b$
    E) Ninguna anterior

21. El conjugado de $\dfrac{1 + i}{i}$ es:

    A) $\dfrac{1 - i}{i}$
    B) $-\dfrac{1 + i}{i}$
    C) $1 + i$
    D) $\dfrac{i}{1 + i}$
    E) $(1 - i)^{-1}$

22. Si $z + \dfrac{1}{z} = -1$, entonces $|z| =$

    A) $\dfrac{1}{2}$
    B) 0
    C) 1
    D) 2
    E) 4

23. El número complejo $z = a + bi$ es tal que $\left|\dfrac{z-i}{z-1}\right| = 1$, entonces

A) $a = -b$
B) $a = b$
C) $a = 2b$
D) $a = 3b^3$
E) $a = -7b$

24. Si $z_1 = (2, -1)$ y $z_2 = (3, x)$ son dos números complejos y además se sabe que $z_1 \cdot z_2$ es un número real, entonces x es

A) -6
B) $-\dfrac{3}{2}$
C) $\dfrac{3}{2}$
D) 6
E) 3

25. Si $z = \dfrac{1-i}{1+i}$, entonces $z^{2012} =$

A) 1
B) -1
C) i
D) $-i$
E) $2i$