INSTITUTO NACIONAL
Dpto. de Física
Prof. **Aldo Scapini G.** ref: Plan diferenciado
Tiempo: 15 horas pedagógicos

Nombre:____Curso:_____

Movimiento de Rotación (n° 2)
Torque y Rotación

El giro de una partícula o cuerpo, requiere de la aplicación de una fuerza, la cual tenga una componente que este desplazada respecto del centro de masa del cuerpo. Es decir, sobre el cuerpo exista un torque neto aplicado, un ejemplo es la aplicación de fuerza sobre un volante para hacer girar las ruedas de un vehículo.

Relación entre torque y aceleración angular.

Para relacionar los dos conceptos anteriores, partiremos de la ecuación fundamental del concepto de torque.

$$\boxed{\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}}$$ Ec. # 1 para torque

Si determinamos el modulo en la ecuación anterior se obtendrá.

$|\vec{\tau}| = |\vec{r}| \cdot |\vec{F}| \cdot \text{sen}\,\alpha$ donde el ángulo α corresponde al ángulo entre $\vec{r}$ y $\vec{F}$, para simplificar supondremos que el ángulo es de 90° y sen 90° = 1

$|\vec{\tau}| = |\vec{r}| \cdot |\vec{F}|$ pero $|\vec{F}| = m \cdot |\vec{a}|$

$|\vec{\tau}| = |\vec{r}| \cdot m \cdot |\vec{a}|$ donde $|\vec{a}| = \frac{|\Delta\vec{v}|}{\Delta t}$ es decir $|\vec{a}| = \frac{v_f - v_0}{\Delta t}$

$|\vec{\tau}| = |\vec{r}| \cdot m \cdot \frac{v_f - v_0}{\Delta t}$ pero $v = \omega \cdot r$

$|\vec{\tau}| = |\vec{r}| \cdot m \cdot \frac{\omega r_f - \omega r o}{\Delta t}$

$|\vec{\tau}| = |\vec{r}| \cdot m \cdot |\vec{r}| \frac{\omega_f - \omega o}{\Delta t}$

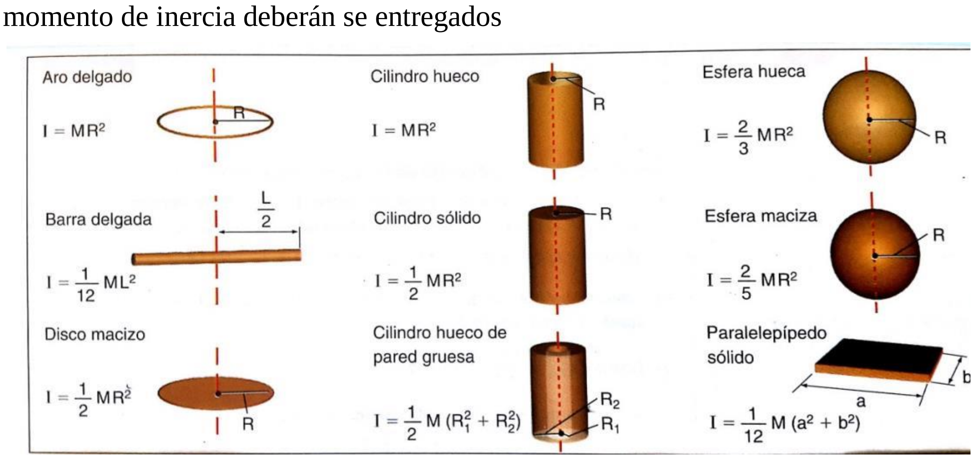
$|\vec{\tau}| = m \cdot |\vec{r}|^2 \cdot \frac{\omega_f - \omega o}{\Delta t}$ $I = m \cdot |\vec{r}|^2$, corresponde al momento de inercia de la partícula y la aceleración angular es $\frac{\omega_f - \omega o}{\Delta t} = |\vec{\alpha}|$

es decir $|\vec{\tau}| = I \cdot |\vec{\alpha}|$ esta ecuación se expresa en forma vectorial como:

$$\boxed{\vec{\tau} = I \cdot \vec{\alpha}}$$ Ec. # 2 para torque

Notas:

1. Nota: El momento de inercia es un concepto de carácter escalar
2. Si el cuerpo es una partícula, el memento de inercia se obtiene como $I = m \cdot |\vec{r}|^2$
3. Las unidades para el momento de inercia en el S.I. son $kg \cdot m^2$
4. Pero si es de un cuerpo regular, se deberá aplicar calculo diferencial o en su efecto los momento de inercia deberán se entregados



La aceleración angular es un concepto vectorial

5. Las unidades de la aceleración angular en el S.I. son rad/s^2 o rad · s^{-2}
6. El torque y la aceleración angular son conceptos que tiene igual dirección y sentido (vectores ligados)

Momentum angular.

Cuando un cuerpo de masa "m" se mueve con una velocidad de tamaño "v" diremos que al cuerpo se le puede asociar un momentum lineal de valor $\vec{P}$ = m · $\vec{v}$ que corresponde a la inercia en movimiento del cuerpo o partícula. Pero cuando el cuerpo rota, el concepto asociado, será el momentum angular o momentum rotacional ($\vec{L}$)

Definiremos el momentum angular de un cuerpo, como la inercia rotación del cuerpo respecto de un eje de giro. El concepto anterior será de carácter vectorial y se determinará matemáticamente mediante la siguiente ecuación.(ec # 1)

$$\boxed{\vec{L} = \vec{r} \times \vec{P}}$$

Notas:

1. El momentum angular corresponde al producto vectorial entre el vector de posición ($\vec{r}$) y el momentum lineal ($\vec{P}$), por lo tanto $\vec{L}$ debe ser perpendicular al plano formado por los dos conceptos anteriores. (al vector de posición ($\vec{r}$) y al momentum lineal ($\vec{P}$))
2. Las unidades del momentum angular en el S.I. serán (kg · m^2 · s^{-1})
3. Otra forma de calcular $\vec{L}$ será:

$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{P}$ pero el momentum lineal el perpendicular con el vector de posición, por lo que el tamaño del momentum angular será:

$|\vec{L}| = |\vec{r}| \cdot |\vec{p}| \cdot \text{sen}\ \alpha$ ec # 1 con (sen 90° = 1)
$|\vec{L}| = |\vec{r}| \cdot |\vec{p}|$ pero $|\vec{p}| = m \cdot |\vec{v}|$

$|\vec{L}| = |\vec{r}| \cdot m \cdot |\vec{v}|$ pero $|\vec{v}| = |\vec{\omega}| \cdot |\vec{r}|$

Por tanto.
$|\vec{L}| = |\vec{r}| \cdot m \cdot |\vec{\omega}| \cdot |\vec{r}|$ pero $I = m \cdot |\vec{r}|^2$

$|\vec{L}| = m \cdot |\vec{r}|^2 \cdot |\vec{\omega}|$ ecuación escalar para el momentum angular y en forma vectorial será:

$$\boxed{\vec{L} = I \cdot \vec{\omega}}$$ ec # 2 del momentum angular

Relación entre torque y el momentum angular.

Esta relación se obtiene a partir de la siguiente ecuación.
$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$ Ec. # 1

$|\vec{\tau}| = |\vec{r}| \cdot |\vec{F}|$ pero $|\vec{F}| = m \cdot |\vec{a}|$

$|\vec{\tau}| = |\vec{r}| \cdot m \cdot |\vec{a}|$ donde $|\vec{a}| = \frac{|\Delta\vec{v}|}{\Delta t}$ es decir $|\vec{a}| = \frac{v_f - v_0}{\Delta t}$

$|\vec{\tau}| = |\vec{r}| \cdot m \cdot \frac{v_f - v_0}{\Delta t}$

Pero si se distribuye la masa en las velocidades se obtiene

$|\vec{\tau}| = |\vec{r}| \cdot \frac{mv_f - mv_0}{\Delta t}$ donde m · v = p ; por último al distribuir $|\vec{r}|$ sobre la variación de momentum lineal , obtendremos la siguiente ecuación

$|\vec{\tau}| = \frac{r \cdot m \cdot v_f - r \cdot m \cdot v_0}{\Delta t}$ en la expresión anterior el termino $r \cdot m \cdot v_f - r \cdot m \cdot v_0$

corresponde a la variación del momentum angular $|\Delta\vec{L}|$ es decir :

$$\boxed{\vec{\tau} = \frac{\Delta\vec{L}}{\Delta t}}$$ Ec. # 3 para torque.

Conservación del momentum angular

La ecuación anterior que relaciona el torque con el momentum angular da origen a la ley de conservación del momentum angular $\vec{\tau} = \frac{\Delta\vec{L}}{\Delta t}$. Imaginemos un sistema sobre el cual la fuerza neta es nula o cero, en tal caso el torque neto será nulo, también es posible tener un sistema en el cual existe una fuerza neta diferente de cero, pero el vector posición es de sentido opuesto con la fuerza en todo instante, en tal caso también el torque neto será nulo o cero.

$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$ al igualar las ecuaciones anteriores de Torque se tendrá la siguiente igualdad:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = \frac{\Delta\vec{L}}{\Delta t} = \vec{0}$$

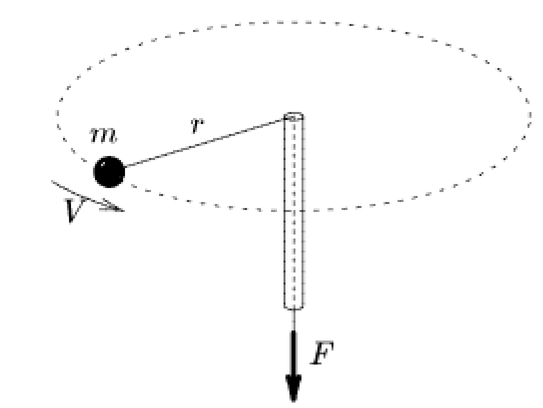
Si la fuerza neta es nula. La **variación de momentum angular será** nulo ($\Delta\vec{L} = \vec{0}$)y por lo tanto el momentum angular será constante ($\vec{L}_o = \vec{L}_f$). Si el momentum angular lo expresamos en término de la rapidez angular tendremos:

$$L = m \cdot |\vec{r}|^2 \cdot |\vec{\omega}| \quad \text{o} \quad \vec{L} = I \cdot \vec{\omega}$$

$I_0 \cdot \vec{\omega}_0 = I_f \cdot \vec{\omega}_f$, ecuación que corresponde a la **ley de conservación del momentum angular**

Ejemplo: En la siguiente figura se muestra una pequeña masa la cual gira con un M.C.U. por lo tanto su velocidad angular es constante ,

si al cordel que pasa por un pequeño tubo se le aplica una fuerza como se muestra en la figura, se tendrá que el momentum de inercia ($I = m \cdot r^2$) disminuye al disminuir el radio de giro, pero en ese instante aumentará su rapidez angular, manteniendo constante el momentum angular ($\vec{L} = I \cdot \vec{\omega}$)

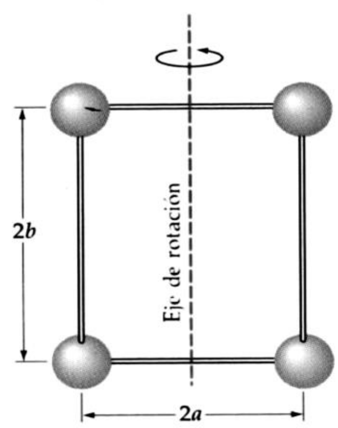


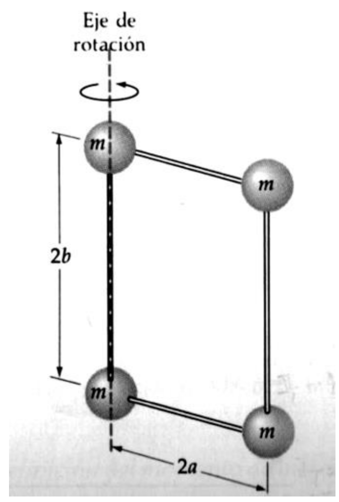
INSTITUTO NACIONAL
Dpto. de Física
Prof. **Aldo Scapini G.** ref: Plan diferenciado
Tiempo: 15 horas pedagógicos

Aplicaciones:

1. Las masas m_1 =20 g , m_2 = 100 g y m_3 = 50 g se sitúan en los vértices de un triángulo equilátero de lado 80 cm, Calcular en momento de inercias del conjunto cuando:
   a. El eje de giro pasa por la masa m_2 y por la masa m_1 y m_3 simultáneamente
   b. El eje de giro pasa por el centro del triángulo y las masa giran equidistante del eje de giro.

2. Se unen cuatro partículas de masa *m* mediante varillas delgadas de masa despreciable, formando un rectángulo de lados *2a y 2b*, tal como muestra la figura. El sistema puede girar alrededor de un eje en el plano de la figura que pasa por el centro, por el eje de lado *2b y* por el eje que une las masas *2a*. En estas tres situaciones determine el momento de inercia del sistema de partículas.





En cuál de los tres casos anteriores, el momento de inercia es menor. Explique

3. Calcular el momento de inercia de un disco de 2 kg de masa y 0,5 m de radio respecto a un eje perpendicular a él y que pasa por el centro

4. Un tiovivo de radio 2 *m* y momento de inercia 500 está girando alrededor de un pivote (eje) sin roce que pasa por su centro a una razón de una revolución cada 5 *s*. Un niño de masa 25 *kg* que originalmente se encuentra de pie en el centro del tiovivo, se desplaza hasta el borde. Determinar la nueva rapidez angular del tiovivo.

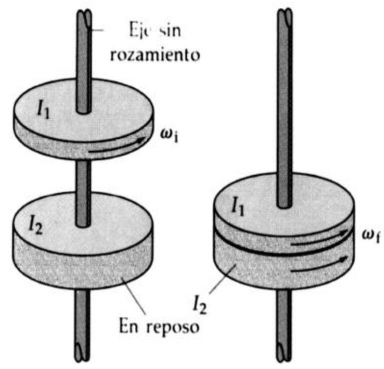
5. Calcular el momento de inercia de los siguientes objetos:
   a) Una varilla de masa 2 kg y longitud 1,5 m, cuando el punto de giro es central y cuando el punto de giro esta en uno de los extremos($1/12\ ML^2$ y $1/3\ ML^2$)
   b) Una esfera maciza de 0,25 kg de masa y de 8 cm de radio si el eje de giro pasa por el centro de ella
   c) Un cilindro solido que tiene su eje de giro que pasa por el centro de él (Polea)

6. Un disco de 30 cm de radio y 200 g de masa, gira alrededor de un eje perpendicular que pasa por su centro, se le aplica una fuerza tangencial de 5 N en un punto periférico determine:

   a) El tamaño de la aceleración angular del disco
   b) La rapidez angular pasado 8 segundos de aplicar la fuerza.

7. Un aro de 25 cm de radio y 800 g de masa parte del reposo, la periferia se somete a una fuerza tangencial de forma que adquiere una rapidez de 150 rpm en 10 segundos, calcular el tamaño de la fuerza aplicada.

8. Un disco de momento de inercia I_1 está girando con rapidez angular ω_i alrededor de un eje que posee roce despreciable, ver figura. Cae sobre otro disco con momento de inercia I_2 inicialmente en reposo sobre el mismo eje. Debido al roce superficial, los dos discos finalmente adquieren una rapidez angular común ω_f. Determine una expresión para la rapidez angular final del



Ejemplo:

9. Un disco de 30 cm de radio y 300 gr de masa, gira alrededor de un eje que pasa por el centro de él. Se aplica una fuerza tangencial de tamaño 2 N.

Determine:

A) El momento de inercia (I)
B) El tamaño del torque $|\vec{\tau}|$
C) El tamaño de la aceleración angular $|\vec{\alpha}|$
D) La rapidez angular del disco luego de 5 segundos si parte del reposo.

Desarrollo:

A) Momento de inercia del disco.-

$$I = \frac{1}{2}\mathrm{M} \cdot \mathrm{R}^2$$

$$\mathrm{I} = 0{,}5 \cdot 0{,}3 \cdot (0{,}3^2)\ (\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2) = \quad 0{,}0135\ \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2$$

B) Tamaño del torque.-

$|\vec{\tau}| = |\vec{r}| \cdot |\vec{F}| \cdot \mathrm{sen}\ \alpha$ (fuerza tangencial → ángulo de 90° con el vector posición)

$|\vec{\tau}| = 0{,}3 \cdot 2 \cdot \mathrm{sen}\ 90° \ \ \mathrm{N} \cdot m$

$|\vec{\tau}| = 0{,}3 \cdot 2 \cdot 1 \ \ \mathrm{N} \cdot m$

$|\vec{\tau}| = 0{,}6\ \mathrm{N} \cdot m$

C) El tamaño de la aceleración angular $|\vec{\alpha}|$

$|\vec{\tau}| = |\vec{r}| \cdot |\vec{F}| \cdot \mathrm{sen}\ \alpha$ ec # 1 con (sen 90° = 1)

$|\vec{\tau}| = \mathrm{I} \cdot |\vec{\alpha}|$ ec # 2

$|\vec{r}| \cdot |\vec{F}| = \mathrm{I} \cdot |\vec{\alpha}|$

$|\vec{\alpha}| = \frac{0{,}6}{0{,}0135}\ \mathrm{rad}^{-2} = 44{,}\overline{4}\ \mathrm{rad}^{-2}$

D) La rapidez angular del disco luego de 5 segundos si parte del reposo

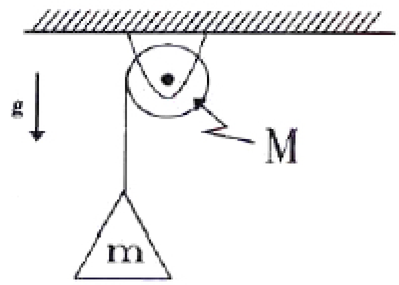
$$\omega_f = \omega_0 + |\vec{\alpha}| \cdot \Delta t$$

$$\omega_f = 0 + 44{,}\overline{4} \cdot 5 \ \ (\mathrm{rad}^{-2})$$

$$\omega_f = 222{,}\overline{2}\ (\mathrm{rad}^{-2})$$

10. Un aro de 10 cm de radio y 10 kg· m^2 de momento de inercia, gira a 120 rpm. Si al aplicar una fuerza tangencial constante se detiene en 20 segundos determine:
    a)El tamaño de la aceleración angular con la que frena
    b)El tamaño de la fuerza aplicada
    c) El número de vueltas que da hasta que se detiene
    Respuesta: a) – 0,2 π rad · s^{-2} ; - 20 π N ; 20 vueltas

11. Una masa m está colgada de una cuerda alrededor de un disco macizo (polea) de masa M y radio R, pivoteado sin roce como se muestra en la Figura. Encontrar la aceleración de la masa (m) cuando el sistema es dejado libre.



12. Dos masa puntuales de valor 0,5 y 0,8 kg, giran alrededor de un eje que está a una distancia de 40 cm de cada una de ellas, las masas efectúan dos vueltas en cada segundo en forma constante. Determine:
    a) La rapidez angular de giro
    b) El momento de inercia de cada masa
    c) El momentum angular de cada masa, si el giran es positivo en el plano X –Y

13. Suponga que la tierra es una esfera homogénea de masa 6,0 x 10^{24} kg, y su radio es de 6400 km, calcular:
    a) El momento de inercia
    b) La rapidez angular
    c) El tamaño del momentum angular de ella.

14. Supón que la Luna es una esfera de 7,4 x 10^{22} kg de masa y tiene un radio de 1,7 x 10^6 m , calcular el tamaño del momentum angular, si la Luna demora 28 días en efectuar un giro.

15. Una plataforma circular gira en forma constante, en su periferia exista una persona la cual camina radial mente hacia el centro de la plataforma, explique qué pasa con la rapidez angular con que gira la plataforma mientras la persona camina.

16. Un disco de 30 cm de radio y 0,4 kg de masa gira en torno a su eje efectuando 30 vueltas en un segundo, se deja caer otro disco de 20 cm de radio y 0,3 kg de masa en forma coaxial sobre el primero. Determine la rapidez angular con la cual gira el conjunto o sistema.