



Relaciones

Sean A y B dos conjuntos, se define una relación \mathcal{R} de A en B como un sub-conjunto del producto cartesiano $A \times B$, si $A = B$ entonces se dice que \mathcal{R} es una relación en A .

Observación: Si en el producto cartesiano $A \times B$ se tiene que $A = B$, se tiene $A \times A$ y se denota por A^2 .

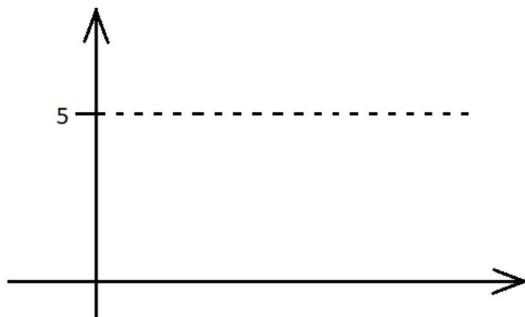
Ejemplo:

1.-) $A \times B$ y \emptyset son relaciones de A en B

2.-) Consideremos los conjuntos $A = \{a, b, c, d\} \wedge B = \{1, 3, 5\} \Rightarrow$ cualquier relación de A en B tendrá a lo más 12 elementos y que pueden ser:

$$\mathcal{R} = \{(a, 1), (a, 3), (a, 5), (b, 1), (b, 3), (b, 5), (c, 1), (c, 3), (c, 5), (d, 1), (d, 3), (d, 5)\}$$

3.-) Sea $\mathcal{R} = \{(a, b) / a \in \mathbb{N} \wedge b = 5\}$ es una relación de \mathbb{N} en \mathbb{N} , pero también puede ser una relación de \mathbb{Z} en \mathbb{Z} o de \mathbb{Z} en \mathbb{R} etc, y su grafica queda determinada aproximadamente como:



4.-) Sea $\mathcal{F} = \{(p, q) / p \in \mathbb{R} \wedge q = \sqrt{p}\}$ es una relación en \mathbb{R} y en donde podemos afirmar que: $(0, 0)$, $(4, 2)$, $(8, 2\sqrt{2})$ pertenecen a \mathcal{F} , en cambio $(-4, \sqrt{-4})$ no pertenece a \mathcal{F} , puesto que $\sqrt{-4} \notin \mathbb{R}$

Definiciones elementales:

Si \mathcal{R} es una relación definida de A en B , entonces si $(a, b) \in \mathcal{R}$ se escribe como $a \mathcal{R} b$ o también como $\mathcal{R}(a) = b$, lo que significa que a está relacionado con b por medio de la relación \mathcal{R} , y se dice que “ a ” está relacionado con “ b ” o que “ b ” es la imagen de “ a ” por medio de la relación \mathcal{R}

Dominio de \mathcal{R} : $\text{Dom } \mathcal{R} = \{a \in A / \exists b \in B : (a, b) \in \mathcal{R}\}$

Recorrido de \mathcal{R} : $\text{Rec } \mathcal{R} = \{b \in B / \exists a \in A : (a, b) \in \mathcal{R}\}$

Si \mathcal{R} es una relación definida de A en B , entonces existe \mathcal{R}^{-1} de B en A llamada relación inversa de \mathcal{R} , es decir, si $a \mathcal{R} b \Rightarrow b \mathcal{R}^{-1} a$.

Y si $(a, b) \notin \mathcal{R}$ se escribe como $a \not\mathcal{R} b$ o también como $\mathcal{R}(a) \neq b$

Sea \mathcal{R} una relación en A , se dice que:

- \mathcal{R} es REFLEJA o reflexiva: si $a \mathcal{R} a, \forall a \in A$
- \mathcal{R} es SIMÉTRICA: si $(a, b) \in \mathcal{R} \Rightarrow (b, a) \in \mathcal{R}$
- \mathcal{R} es ANTISIMÉTRICA: si $[(a, b) \in \mathcal{R} \wedge (b, a) \in \mathcal{R}] \Rightarrow a = b$
- \mathcal{R} es TRANSITIVA: si $(a, b) \in \mathcal{R} \wedge (b, c) \in \mathcal{R} \Rightarrow (a, c) \in \mathcal{R}$

\mathfrak{R} es una RELACIÓN de EQUIVALENCIA $\Leftrightarrow \begin{cases} \mathfrak{R} \text{ es REFLEJA} \\ \mathfrak{R} \text{ es SIMÉTRICA} \\ \mathfrak{R} \text{ es TRANSITIVA} \end{cases}$

\mathfrak{R} es una RELACIÓN de ORDEN $\Leftrightarrow \begin{cases} \mathfrak{R} \text{ es REFLEJA} \\ \mathfrak{R} \text{ es ANTISIMÉTRICA} \\ \mathfrak{R} \text{ es TRANSITIVA} \end{cases}$

Def.: Dada una relación \mathfrak{R} de A en B y una relación S de B en C entonces existe una relación T de A en C llamada relación compuesta de \mathfrak{R} y S , y que se denota por $S \circ \mathfrak{R}$ o bien $S(\mathfrak{R}(x))$

$$\forall (a, b) \in \mathfrak{R} \text{ y } \forall (b, c) \in S \Leftrightarrow (a, c) \in S \circ \mathfrak{R}$$

$$\text{O bien: Si } \mathfrak{R}(a) = b \wedge S(b) = c \Rightarrow (S \circ \mathfrak{R})(a) = c$$

Dos pares ordenados son iguales ssi son iguales componente a componente, es decir,

$$(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow (a = c \wedge b = d)$$

EJERCICIOS

1.-) Dados los conjuntos: $A = \{x / x \in \mathbb{N} \wedge 6 \leq x < 10\}$ y $B = \{y / y \in \mathbb{Z} \wedge -4 < y < 0\}$
Escribir por extensión $A \times B$, $B \times A$, $\#A$, $\#B$, $\#(A \times B)$ y $\#(B \times A)$.

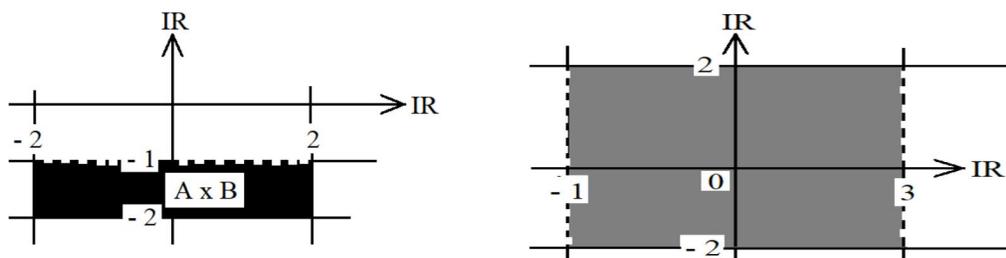
2.-) Dados los conjuntos: $C = \{a / a \text{ es primo} \wedge 1 < a < 9\}$, $D = \{b / b \in \mathbb{N} \wedge 1 < b < 4\}$
 $E = \{c / c \in \mathbb{Z} \wedge -1 \leq c \leq 5\}$, determinar:

- C^2
- D^2
- E^2
- $C \times (D \cap E)$
- $(C \times D) \cap (C \times E)$
- $(C \times E) \cup (C \times D)$
- $C^2 \cup (D \times E)$
- $(D \times C) \cap (D \times E)$
- $D \times (C \cap E)$
- $(E \times C) \cap D^2$

3.-) Graficar el producto cartesiano $A \times B$, sabiendo que:

$$A = \{a / a \in \mathbb{R} \wedge |a| > 2\} \text{ y } B = \{x / x \in \mathbb{R} \wedge |x| < 3\}$$

4.-) Escribir por comprensión los siguientes gráficos de productos cartesianos



5.-) Dados los conjuntos $A = \{2, 4, 6\}$, $B = \{a, b\}$ y $C = \{0, 1\}$

Graficar por medio de un diagrama de árbol, determinar la cardinalidad y escribir por extensión, cada uno de los siguientes productos cartesianos.

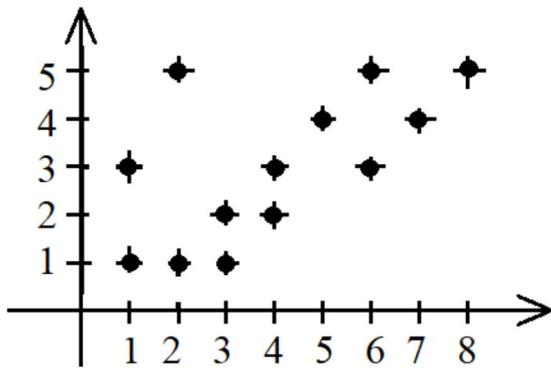
- $A \times B \times C$
- $A \times B^2$
- $A^2 \times C$
- $C^2 \times B$

6.-) Dado el conjunto $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ (que representa una esfera de centro en el origen $(0, 0, 0)$ y cuyo radio es 1, en un espacio de tres dimensiones).

Determinar si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas de acuerdo al enunciado

- $(0, 0, 1) \in G$
- $(0, 1, 0) \in G$
- $(1, 0, 0) \in G$
- $(1, 1, 0) \in G$
- $(1, 1, 1) \in G$
- $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \in G$
- $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right) \in G$
- $(0, 0, 0) \in G$

7.-) Dada la relación de \mathfrak{R} en \mathbb{N} , que se muestra en la gráfica, determinar y graficar \mathfrak{R}^{-1}



8.-) Dados $A = \{a \in \mathbb{N} / 1 \leq a \leq 5\} \wedge B = \{a \in \mathbb{R} / a^3 - 9a^2 + 26a - 24 = 0\}$, considere la relación \mathfrak{R} de A en B definida por $\mathfrak{R} = \{(a, b) \in A \times B / a + b \leq 6\}$, determinar por extensión \mathfrak{R} y \mathfrak{R}^{-1}

9.-) Dado $A = \{x / x \text{ es un digito}\}$ y considere las siguientes relaciones en A

$$\mathfrak{R} = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (1, 3), (5, 6), (7, 2), (8, 0), (9, 1)\}$$

$$S = \{(4, 7), (5, 2), (3, 1), (0, 8), (1, 9), (3, 2), (2, 3), (1, 1)\}$$
 Determinar:

- $S \circ \mathfrak{R}$
 - $\mathfrak{R} \circ S$
 - S^{-1}
 - \mathfrak{R}^{-1}
 - $S^{-1} \circ \mathfrak{R}^{-1}$
 - $\mathfrak{R}^{-1} \circ S^{-1}$
 - $\mathfrak{R}^{-1} \cup S^{-1}$
 - $\mathfrak{R} \cap S$
 - $\mathfrak{R}^{-1} \cap S^{-1}$
 - $\mathfrak{R} \cup S$
 - $\text{Dom } \mathfrak{R}$
 - $\text{Rec } \mathfrak{R}$
 - $\text{Dom } \mathfrak{R}^{-1}$
- J.C.C.L. 3 IN

- $\text{Rec } \mathfrak{R}^{-1}$
- $\text{Dom } S$
- $\text{Rec } S$

10.-) Dado el conjunto $A = \{-1, 0, 1, 2\}$ y las siguientes relaciones en A

- $\mathfrak{R} = \{(-1, 1), (0, 0), (1, -1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$
- $S = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$
- $T = \{(a, b) \in A \times A \mid a^2 + b^2 = 1\}$
- $V = \{(a, b) \in A \times A \mid ab \geq 0\}$

Determine que propiedades cumple(n) cada una de ellas

11.-) Construya una relación \mathfrak{R} en \mathbb{N} que contenga 9 elementos, que cumpla con ser Transitiva y que además contenga los pares ordenados $(3, 5), (5, 9), (5, 7)$ y $(7, 5)$

12.-) Dado el conjunto $A = \{2, 5, 7, 8\}$, determinar una relación \mathfrak{R} tal, que cumpla con:

- $\text{Dom } \mathfrak{R} = \{2, 5, 8\} = \text{Rec } \mathfrak{R}$
- \mathfrak{R} sea Simétrica
- $\# \mathfrak{R} = 3$
- $(5, 2) \in \mathfrak{R}$

13.-) Confeccione una relación en $A = \{1, 2, 3\}$ que no sea ni simétrica ni antisimétrica

14.-) Pruebe que en \mathbb{Z} , la relación \mathfrak{R} definida por $\mathfrak{R} = \{(a, b) \mid \exists k \in \mathbb{Z}: b - a = 3k\}$ es una relación de equivalencia

15.-) Pruebe que en \mathbb{Z} , la relación S definida por $S = \{(a, b) \mid \exists k \in \mathbb{N}_0: b - a = k\}$ es una relación de Orden

16.-) Dado el conjunto $A = \{a, b, c, d\}$ y la relación $\mathfrak{R} = \{(a, b), (c, d), (a, d), (b, a)\}$, agregar el mínimo de elementos necesarios para que la relación \mathfrak{R} sea una relación transitiva

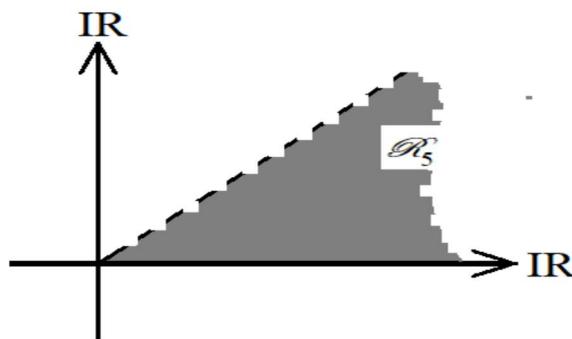
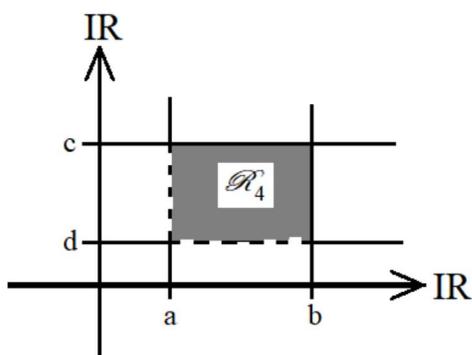
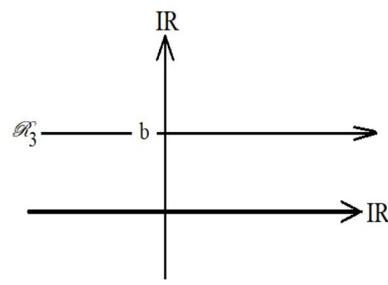
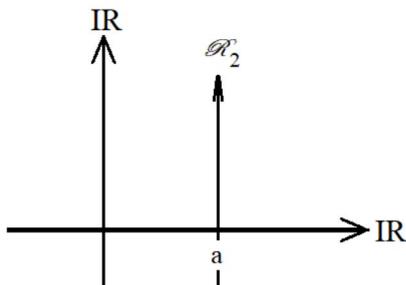
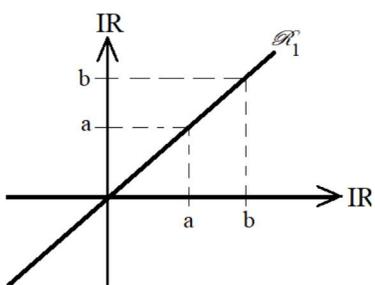
17.-) Dado el conjunto

$A = \{a, b, c, d\}$ y la relación $\mathfrak{R} = \{(a, b), (b, c), (a, e), (c, b), (a, d), (c, e), (b, a), (a, c)\}$, elimine los elementos mínimos necesarios de tal modo que \mathfrak{R} sea una relación antisimétrica.

18.-) Hallar el valor de a y b en cada caso de tal modo que se cumpla la igualdad de pares ordenados, estableciendo previamente las restricciones en caso de que existan

- $(5, 9) = (10a, -b)$
- $(4a - 1, b + 3) = (3a, 0)$
- $\left(\frac{a}{3}, a + b\right) = (6 - b, 10)$
- $(2a, 12) = (-8, b - a)$
- $(\sqrt{a}, 2) = (5, 1 + \sqrt{b})$
- $(7[x - 18], 7[b - 3]) = (3[x - 14], 9[b - 1] - 38)$
- $\left(\frac{5a-5}{a+1}, \frac{b}{2} + \frac{3b}{4}\right) = \left(3, 15 + \frac{5b}{6}\right)$
- $\left(\frac{a}{p} + \frac{a}{q}, 1\right) = \left(r, \frac{b+p}{p} - \frac{b+q}{q}\right)$
- $(\sqrt{a+9}, 9) = (7, b + \sqrt{10b+6})$
- $\left(\frac{p}{q-a}, b\right) = \left(\frac{q}{p-a}, \frac{p(p-b)}{q} - \frac{q(q-b)}{p}\right)$
- $\left(\frac{a+1}{1-\frac{a+1}{a-1}}, \frac{3b-7}{4b+2}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{3b-14}{4b-13}\right)$

19.-) Determine el dominio, el recorrido y escriba por comprensión las siguientes relaciones que se muestran en los gráficos adjuntos



20.-) Grafique, además de determinar el dominio y el recorrido de las siguientes relaciones:

- $\mathfrak{R}_1 = \{(a, b) / a \wedge b \in \mathbb{R} \text{ y } b = -1\}$
- $\mathfrak{R}_2 = \{(a, b) / a \wedge b \in \mathbb{R} \text{ y } a + b = 8\}$
- $\mathfrak{R}_3 = \{(a, b) / a \wedge b \in \mathbb{R} \text{ y } a^2 + b^2 = 1\}$
- $\mathfrak{R}_4 = \{(a, b) / a \wedge b \in \mathbb{R} \text{ y } b = \frac{2}{a-1}\}$
- $\mathfrak{R}_5 = \{(a, b) / a \wedge b \in \mathbb{R} \text{ y } b = \frac{1}{\sqrt{a^2-1}}\}$
- $\mathfrak{R}_6 = \{(a, b) / a \wedge b \in \mathbb{R} \text{ y } a^2 - 2a - b = 3\}$

21.-) ¿Cuántas relaciones de A en B se pueden definir?, determine (dándose usted los conjuntos necesarios) todas y cada una de ellas (en los casos que se pueda) si se sabe que:

- Si $\# A = 1 \wedge \# B = 1$
- Si $\# A = 2 \wedge \# B = 1$
- Si $\# A = 2 \wedge \# B = 2$
- Si $\# A = 3 \wedge \# B = 2$
- Si $\# A = 4 \wedge \# B = 5$
- Si $\# A = m \wedge \# B = n$

22.-) Dados los conjuntos $A = \{3, 4, 5\} \wedge B = \{2, 6\}$, determinar:

- $A \times B$
- $B \times A$
- $\mathfrak{R}_1 = \{(a, b) / a \in A \wedge b \in B \text{ y } a \text{ es múltiplo de } b\}$
- $\mathfrak{R}_2 = \{(a, b) / a \in A \wedge b \in B \text{ y } a = b\}$
- $\mathfrak{R}_3 = \{(a, b) / a \in A \wedge b \in B \text{ y } a \text{ es antecesor de } b\}$

23.-) Dados $C = \{x \in \mathbb{Z} / -4 \leq x < -2\}$ y $D = \{x \in \mathbb{N} / 1 \leq x \leq 5\}$, escribir por extensión, graficar en un diagrama de coordenadas, determinar el dominio y el recorrido de cada una de las siguientes relaciones:

- $\mathfrak{R}_1 = \{(x, y) \in C \times D / |x| \leq y\}$
- $\mathfrak{R}_2 = \{(a, b) \in D \times C / a + b \text{ es un número impar} \wedge b \in \mathbb{R} \text{ y } b = -1\}$
- $\mathfrak{R}_3 = \{(x, y) \in C \times D / x^2 < 3y\}$
- $\mathfrak{R}_4 = \{(x, y) \in D \times C / -2x = y\}$
- $\mathfrak{R}_5 = \{(x, y) \in C \times D / |y - x| \text{ es un número compuesto}\}$
- $\mathfrak{R}_6 = \{(x, y) \in C^2 / x \cdot y \text{ es el cuadrado de un número}\}$
- $\mathfrak{R}_7 = \{(x, y) \in D^2 / x \text{ e } y \text{ son primos relativos entre sí}\}$

24.-) Dados los conjuntos $A = \{x \in \mathbb{R} / -3x^2 + 10x - 3 > 0\}$ y $B = \{x \in \mathbb{R} / -x^2 + 5x - 6 < 0\}$ determinar el dominio y el recorrido, graficar y escribir al menos cinco pares ordenados y determinar la relación inversa en cada una de las siguientes expresiones:

- $A \times B$
- $B \times A$
- $\mathfrak{R}_1 = \{(x, y) \in A \times B / a = b\}$
- \mathfrak{R}_1^{-1}
- $\mathfrak{R}_2 = \{(x, y) \in A \times B / x < y\}$
- \mathfrak{R}_2^{-1}
- A^c
- B^c
- $A^c \times B^c$
- $B^c \times A^c$
- $(A \times B)^c$
- $(B \times A)^c$

25.-) Graficar en \mathbb{R}^2 el conjunto de todos los pares ordenados (a, b) que satisfagan en cada caso la condición Dada:

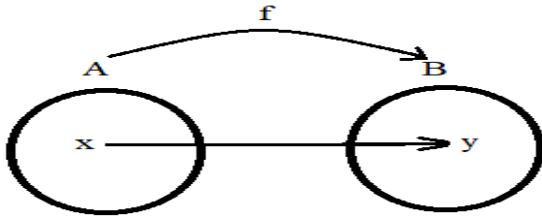
- $x = 4 \quad \forall y \in \mathbb{R}$
- $x \cdot y < 0$
- $y = -3 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- $\frac{x}{y} > 0$
- $x = y$

FUNCIONES

Diremos que una función es una relación, es decir, es un subconjunto de un producto cartesiano que cumple con dos condiciones necesarias y suficientes y que son que todo elemento del conjunto de inicio esté relacionado con algún elemento del conjunto de llegada y además que esta relación es única

Sea $f: A \rightarrow B$ una relación de A en B, f es función $\forall x \in A, \exists! y \in B$ tal que $f(x) = y$

Gráficamente:



Se dice que “y” es la **imagen** de “x” en B y por otro lado que “x” es la **preimagen** de “y”

Dominio de una función: Se llama Dominio de una función y que se designa por **Dom f** al conjunto de partida, es decir, al conjunto formado por todas las primeras componentes o **Preimágenes** de los pares ordenados que pertenecen a la función.

Simbólicamente: **Dom f** = {x / (x, y) ∈ f}

Recorrido de una función: Se llama Recorrido de una función y que se designa por **Rec f** al conjunto de llegada, es decir, al conjunto formado por todas las segundas componentes o **Imágenes** de los pares ordenados que pertenecen a la función.

Simbólicamente: **Rec f** = {y / (x, y) ∈ f}

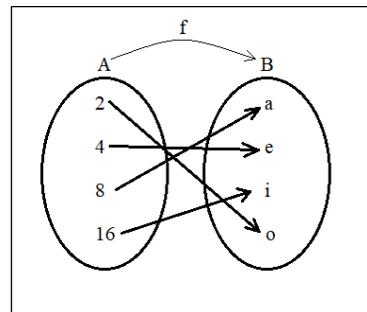
Ejemplos:

1.-) De acuerdo a la gráfica o diagrama de flechas, se tiene que:

$f(2) = o$
 $f(4) = e$
 $f(8) = a$
 $f(16) = i$

Dom f = {2, 4, 8, 16}

Rec f = {a, e, i, o}

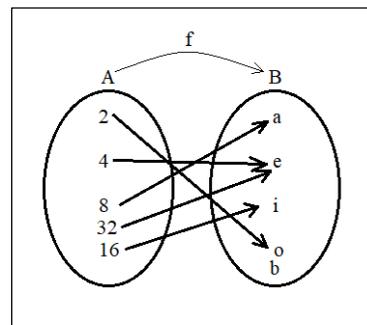


2.-) De acuerdo a la gráfica o diagrama de flechas, se tiene que:

$f(2) = o$
 $f(4) = e$
 $f(8) = a$
 $f(16) = i$
 $f(32) = e$

Dom f = {2, 4, 8, 16, 32}

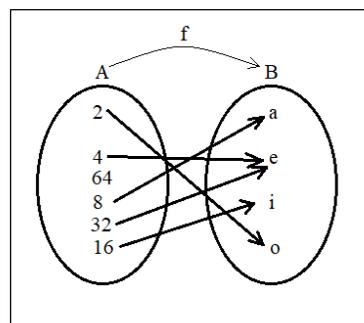
Rec f = {a, e, i, o}



3.-) De acuerdo a la gráfica o diagrama de flechas, se tiene que:

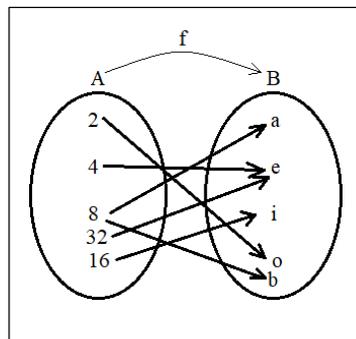
No es función puesto que no existe $f(64)$, por lo tanto, No cumple con la condición de que todos los elementos del conjunto de partida deben formar parte del Dominio de la función.

Dom f = {2, 4, 8, 16, 32} ≠ A, i. e., **Dom f** ⊂ A



4.-) de acuerdo a la gráfica o diagrama de flechas, se tiene que:

No es función puesto que $f(8) = a \wedge f(8) = b$, es decir, El elemento 8 del Dominio tiene 2 imágenes, por lo tanto, No cumple con la condición de UNICIDAD



5.-) Sea $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$

$$x \mapsto f(x) = y = 2x$$

R.: Si es una función, porque todo número natural tiene un doble y éste es único

6.-) Ejercicios resueltos:

1.-) Dada la función $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $h(x) = a$, donde a es el mayor entero que cumple con que $a \leq x$, Encontrar:

- $h(11/3)$
- $h(7)$
- $h(-35)$

Respuesta: $h(11/3) = h(3,6) = 3$, $h(7) = 7$, $h(-35) = 0$

2.-) ¿Cuáles son las dos razones que impiden que la relación $g = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x^2 + y^2 = 9\}$ sea una función

Respuesta:

-) El valor de $g(x)$ no está definido para todos los números reales, por ejemplo, si $x = 4 \Rightarrow 4^2 + y^2 = 9 \Rightarrow 16 + y^2 = 9 \Rightarrow y^2 = 9 - 16 \Rightarrow y^2 = -7$, $\nexists y \in \mathbb{R}$ que al elevarlo al cuadrado se obtenga un real negativo.
-) Si $x = 1 \Rightarrow 1^2 + y^2 = 9 \Rightarrow 1 + y^2 = 9 \Rightarrow y^2 = 9 - 1 \Rightarrow y^2 = 8 \Rightarrow y = \pm 2\sqrt{2}$, es decir tiene dos imágenes

3.-) Dadas las funciones $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = (x+2)$ y $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = \frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)}$, pruebe si son o no iguales.

Respuesta: No son iguales puesto que el $Dom f = \mathbb{R}$ sin embargo el $Dom g = \mathbb{R} - \{1\}$ ya que en este punto la función g no está definida, además le $Rec f = \mathbb{R} \wedge Rec g = \mathbb{R} - \{3\}$

4.-) Dada la función $k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $k(x) = x^2$ ¿es una función biyectiva?

Respuesta: No porque no es inyectiva que si $x_1 = 3 \Rightarrow k(x_1) = 3^2 \Rightarrow k(x_1) = 9$, si $x_2 = -3 \Rightarrow k(x_2) = (-3)^2 \Rightarrow k(x_2) = 9$ y para que k sea inyectiva debe ocurrir que si $k(x_1) = k(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ como $k(x_1) = 9 \wedge k(x_2) = 9 \Rightarrow 3 = -3$ lo cual es una contradicción puesto que $3 \neq -3$ en el conjunto de los números reales.

Tampoco es epiyectiva, puesto que $y = -25 \in \mathbb{R}$ y no existe ningún número real que elevado al cuadrado de como resultado -25 , por lo tanto hay al menos un número en el conjunto de llegada que no tiene pre - imagen.

EJERCICIOS POR RESOLVER

1.-) Determine si las siguientes relaciones definen

- $P = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (1, 4), (6, 9)\}$ una función en \mathbb{N}
- $R = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : y = 2x + 1\}$ una función en \mathbb{Z}
- $S = \{(2, x) : x \in \mathbb{R}\}$ una función en \mathbb{R}
- $T = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x = y^2\}$ una función en \mathbb{R}

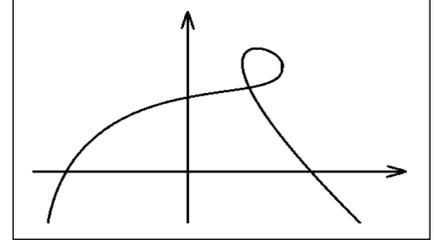
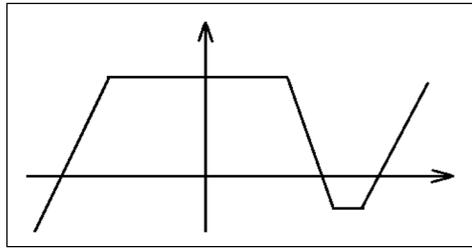
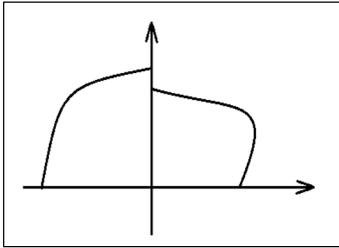
2.-) Muestre a través de un contraejemplo que las siguientes relaciones no son funciones

- $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$
- $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x < 3 \wedge -1 \leq y \leq 5\}$

3.-) Sea $A = \{a, b, c\}$ y $B = \{1, 0\}$. Determine todas las funciones distintas que se forman de A en B

4.-) Dados $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{a, b, c, d\}$ y la relación $\mathcal{L} \subseteq A \times B = \{(1, a), (2, c), (1, c), (4, b), (5, a), (4, d)\}$ agregue o elimine elementos de tal modo de convertir esta relación en una función

5.-) Cuál (es) de los siguientes gráficos corresponden al de una función en \mathbb{R}



6.-) Sea f una función en \mathbb{R}^2 definida por $f(x) = x^3 - x + 1$ ¿Cuáles de los siguientes pares pertenecen a la función? $\{(0, 0), (1, 0), (0, 1), (1, 1), (1, -1), (2, 3), (2, -3), (-2, -5), (-1, 1)\}$

7.-) Dada la función f en \mathbb{R}^2 definida por $f(x) = 3x^2 - x^3 + 5x - 1$, determinar

- $f(-1)$
- $f(0)$
- $f(\sqrt{3})$

8.-) Dada la función f en \mathbb{R}^2 definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$ con $a, b, c \in \mathbb{R}$, determinar

- $f(x + 1)$
- $f(x - 2)$
- $f\left(\frac{1}{x}\right)$ con $x \neq 0$

9.-) Dada la función f en \mathbb{R}^2 definida por $f(x) = 4x^2 - x + \frac{2}{x-1}$, determinar

- $f(0)$
- $f(x + 1)$

10.-) Considere los intervalos $A = [-1, 1]$, $B = [1, 3]$ y $C = [-3, -1]$ y las funciones f, g, h definidas en A, B, C respectivamente, por la fórmula $f(x) = g(x) = h(x) = x^2$. ¿Cuál de estas funciones es inyectiva?

11.-) Sea A un conjunto tal que $\# A \geq 2$ y sea $a \in A$, se define la función $f: A \rightarrow A$ tal que $f(x) = a, \forall x \in A$

- Determine el recorrido de f
- Muestre que f no es ni inyectiva ni epiyectiva
- Si $A = \mathbb{N}$ y $a = 2$, grafique f
- Si $A = \mathbb{R}$ y $a = 2$, grafique f .

12.-) Sea $g: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, definida por $g(x) = 2x$

- Determine $g \circ g$
- Determine $g \circ g \circ g$
- Determine $g \circ g \circ g \circ \dots \circ g$ (n veces)
- Demuestre que g es inyectiva
- ¿Es g una función biyectiva?, justifique su respuesta

13.-) Sea $h: \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $h(x) = \frac{1}{x}$

- Demuestre que $h(a) - h(b) = h\left(\frac{ab}{b-a}\right)$

14.-) Determinar $k(x + 1)$ si se sabe que $k(x - 1) = x^2$

15.-) Una función g está definida en $[1, 5]$. ¿Para cuántos "x" existen

- $g(x - 3)$
- $g\left(\frac{1}{x}\right)$
- $g(1 - 7x)$?

16.-) Si la compañía Costa S. A. tiene en su bodega 500 unidades de Play, al comienzo de mes y se venden 20 Unidades diarias:

- Encontrar una función que represente el número de unidades en bodega un día cualquiera del mes.
- En qué día del mes se agotará la cantidad de Play
- ¿Cuántos Play tendrá transcurridos 15 días?

17.-) El costo de almacenaje de sacos de papas está dado por la función $f(x) = 0,04x + 1,36$ en donde x representa el costo unitario de cada saco de papas.

- Construya la gráfica de f para $x \in [5, 20]$
- ¿Cuál sería el costo de almacenaje para el cajón de tomates, si cada cajón cuesta \$6?
- ¿Cuál sería el valor de cada unidad de cajón de peras si el costo de almacenaje es de \$1,80?

Ejercicios extraídos de Guía de ejercicios de la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas de la Universidad de Chile, Introducción al Álgebra 09-1 año 2009.

18.-) Indique cuál de los siguientes conjuntos establece una función:

- $R = \{(a, b) \in \mathbb{N}^2 : b = a^p \text{ para algún } p \in \mathbb{N}\}$
- Sean $a, b, c \in \mathbb{R} - \{0\}$ fijos, $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y = ax^3 + bx + c\}$
- $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x = y^2 + 2y + 1\}$
- $R = \{(y, x) \in \mathbb{R}^2 / x = (y + 1)^2\}$

19.-) Indique cuáles pares de funciones son iguales, si no lo son, explique porqué

- $f, g: \mathbb{R} - \{-2\} \rightarrow \mathbb{R}$ con $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 2x + 2} \wedge g(x) = \frac{x - 1}{x + 2}$
- $f, g: \mathbb{R} - \{-1, 0, 1\} \rightarrow \mathbb{R}$ con $f(x) = \frac{1}{x} \wedge g(x) = \frac{(x - 1)(x + 1)}{x^3 - x}$
- $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ con $f(x) = (x + 2)^3 \wedge g(x) = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$
- $f, g: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ con $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x}} \wedge g(x) = \sqrt{x}$

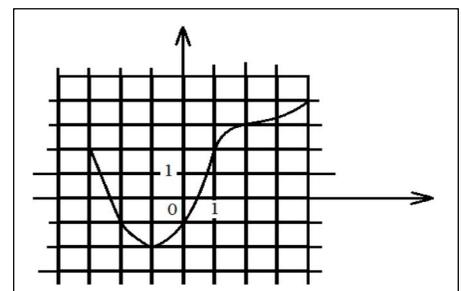
20.-) Encuentre la función inversa de las siguientes funciones, verificando previamente si son biyectivas.

- $f: \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, con $f(x) = 1/x^3$
- Sea $a \neq 0$, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, con $f(x) = ax + b$
- $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x}}$

Ejercicios extraídos del libro: CÁLCULO DE UNA VARIABLE DE JAMES STEWART

21.-) La gráfica muestra una función, de acuerdo a ella

- Determinar el valor de $f(-1)$
- Estime el valor de $f(2)$
- ¿Para qué valores de x , $f(x) = 2$
- Estime los valores de x tales que $f(x) = 0$
- Establezca el dominio y el recorrido o rango de f



22.-) Si $f(x) = x^3$, evalúe el cociente de diferencias $\frac{f(2+h) - f(2)}{h}$ y simplifique su respuesta

23.-) Encuentre el Dominio de la función:

- $f(x) = \frac{2x + 1}{x^2 + x - 2}$
- $g(x) = \frac{\sqrt[3]{x}}{x^2 + 1}$
- $h(x) = \sqrt{4 - x} + \sqrt{x^2 - 1}$

24.-) Qué aspecto tiene cada una de las gráficas siguientes a partir de la gráfica de f presentada en el ejercicio 22

- $y = -f(x)$
- $y = 2f(x) - 1$
- $y = f(x - 3) + 2$

25.-) Sin usar calculadora haga un bosquejo de cada una de las siguientes gráficas

- $y=x^3$
- $y=(x+1)^3$
- $y=(x-2)^3+3$
- $y=4-x^2$
- $y=\sqrt{x}$
- $y=2\sqrt{x}$

26.-) Sea $f(x)=\begin{cases} 1-x^2 & \text{si } x \leq 0 \\ 2x+1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

- Evalúe $f(-2) \wedge f(1)$
- Trace la gráfica

27.-) Si $f(x)=x^2+2x-1$ \wedge $g(x)=2x-3$ encuentre cada una de las siguientes funciones

- $f \circ g$
- $g \circ f$
- $g \circ g \circ g$

28.-) Al abrir un grifo de agua caliente, la temperatura T del agua depende de cuánto tiempo ha estado saliendo el agua. Dibuje un esbozo de gráfica de T como una función del tiempo t que ha transcurrido desde que fue abierto el grifo

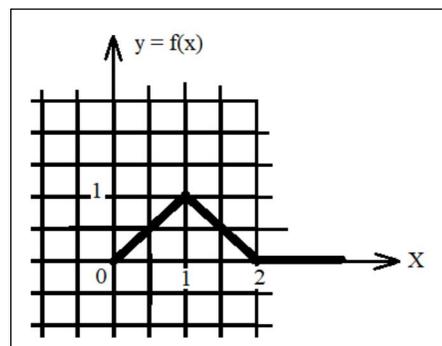
29.-) Un contenedor rectangular sin tapa tiene un volumen de 10 m^3 . La longitud de su base es dos veces su ancho. El material para la base cuesta \$10 por metro cuadrado, y el material para los lados cuesta \$6 por metro cuadrado. Expresé el costo de los materiales como una función del ancho de la base.

30.-) Encuentre el dominio de cada una de las siguientes funciones: $f(x)=\sqrt{x+2}$ \wedge $g(x)=\frac{1}{x^2-x}$

31.-) Una función f está definida por $f(x)=\begin{cases} 1-x & \text{si } x \leq -1 \\ x^2 & \text{si } x > -1 \end{cases}$ evalúe

- $f(-2)$
- $f(-1)$
- $f(0)$
- grafique la función.

32.-) Encuentre una fórmula para la función f graficada en la figura



33.-) Sea $f(x)=\begin{cases} 3x & \text{si } -1 \leq x \leq 0 \\ x^3 & \text{si } 0 < x \leq 2 \end{cases}$

- Es f inyectiva? Justifique demostrando si asegura que si lo es o con un contraejemplo si afirma que no lo es
- Es f epiyectiva? Justifique demostrando si asegura que si lo es o con un contraejemplo si afirma que no lo es
- Es f biyectiva?, si lo es encuentre f^{-1}
- Grafique f^{-1}

34.-) Sea $f(x)=5x+3x-4$

- Determine el dominio de f
- Determine el recorrido de f
- Restringa el dominio y el recorrido (si es necesario) de tal modo que f sea biyectiva
- Grafique f
- Determine f^{-1}
- Determine el dominio y el recorrido de f^{-1}
- Grafique f^{-1}

Ejercicios extraídos de guías del profesor Domingo Almendras y recopiladas por el profesor Oscar Godoy

35.-) Si $f(x-2) = \frac{1}{x+1}$ con $x \in \mathbb{R} - \{-1\} \Rightarrow \begin{cases} f(1-x) = \\ f(2) = \end{cases}$

36.-) Si $f\left(\frac{1}{x}\right) = x^2 + 1$ con $x \in \mathbb{R} - \{0\} \Rightarrow \begin{cases} f(x) = \\ f(-1) = \end{cases}$

37.-) Si $f\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = x$ con $x \in \mathbb{R} - \{1\} \Rightarrow \begin{cases} f(x) = \\ f(2x+1) = \end{cases}$

38.-) Sea $f_0(x) = \frac{1}{1-x} \wedge f_n(x) = f_0(f_{n-1}(x))$ con $n = 1, 2, 3, \dots$ evaluar f_{2012} (2012)

39.-) Sea $f(1) = 1 ; f(1) + f(2) + \dots + f(n) = n^2 f(n) \forall n \in \mathbb{N}$, calcular $f(2012)$

40.-) Sea $f(x) = \frac{9^x}{9^x + 3}$ calcular: $f\left(\frac{1}{1996}\right) + f\left(\frac{2}{1996}\right) + \dots + f\left(\frac{1995}{1996}\right)$

41.-) Sea $(f \circ g)(x) = \frac{1}{x+1} \wedge g(x) = \frac{x}{x+2}$ Calcular $f(1+x)$

42.-) Sea $(f \circ g)(x) = \frac{x-3}{2} \wedge f(x) = \frac{1}{x+4}$ calcular $g^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$

43.-) Sea $(f \circ g)(x) = \frac{x}{x+1} \wedge g(x) = \frac{2}{x-1}$ Calcular $f^{-1}(2x+3)$

Ejercicios extraídos de una prueba confeccionada por el profesor Luis Arancibia

44.-) Se da la relación definida en $\mathbb{R}^2: f(x) = \frac{1}{1-x}$, Si $f\left(\frac{1}{x}\right) = f(x)$ entonces $x =$
a) 1 b) 0 c) -1 d) 2 e) No existe valor real

45.-) Si $f(x) = \frac{ax+b}{x}$ entonces $f^{-1}(a+b) =$
a) 1 b) -1 c) $a + \frac{b}{a+b}$ d) b e) a

46.-) Si $f(x) = \frac{x-1}{ax+1}$ entonces $f^{-1}\left(-\frac{1}{a}\right) =$
a) $\frac{a-1}{2}$ b) $\frac{a-1}{2a}$ c) $\frac{a-1}{a}$ d) 0 e) No está definida

47.-) Si $f(x) = 2x-1 \wedge (g \circ f) = \frac{2x}{2x-1}$ entonces $g^{-1}(x) =$
a) $\frac{x}{x+1}$ b) $\frac{x}{x-1}$ c) $\frac{1}{x+1}$ d) $\frac{1}{x-1}$ e) $\frac{x+1}{2}$

48.-) Una función es tal que $\forall n \in \mathbb{N} : f(2n) = 2 + f(n)$, Si $f(2) = 3 \Rightarrow f(8) =$
a) 5 b) 6 c) 7 d) 8 e) 12

49.-) Sea $f(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ una función en \mathbb{R}^2 , entonces $\text{Dom } f =$

- a) $]0, 1[$ b) $] - 1, 1[$ c) $] - 1, 1]$ d) $] - 1, \infty[$ e) $\mathbb{R} - \{-1\}$

50.-) Si $f(x) = 2^{-x} \Rightarrow f(x-1) =$

- a) $f(x) + 1$ b) $\frac{1}{2} f(x)$ c) $2 f(x)$ d) $f(x) - 1$ e) $f(x) + 2$

51.-) Si $f(x) = \frac{x+1}{x}$, $x \neq 0$ y si $f[g(x)] = x - 1 \Rightarrow g(x+2) =$

- a) $\frac{2}{x+1}$ b) $\frac{1}{x+2}$ c) $\frac{2}{x}$ d) $\frac{1}{x}$ e) N. A.

Respuestas:

- 1.a) $\frac{1}{4-x}$ b) $\frac{1}{5}$ 2.a) $f(x) = \frac{1}{x^2} + 1$ b) 2 3.a) $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ b) $1 + \frac{1}{x}$

J.C.C.L. 6 IN