INSTITUTO NACIONAL JOSÉ MIGUEL CARRERA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PRIMERO MEDIO
Coordinador: C. H. G.
Primer Semestre 2019

ÁLGEBRA (1)

LENGUAJE ALGEBRAICO

El lenguaje algebraico se basa en el uso de letras y relaciones matemáticas para generalizar diferentes situaciones.
Ejemplos:

• El perímetro P de un cuadrado de lado a $P = 4a$.
• El área A de un cuadrado de lado a $A = a^2$.
• El área A de un triángulo de base b y altura h: $A = \frac{bh}{2}$

Cada una de las letras involucradas en las fórmulas anteriores es una *variable*; a cada variable se le pueden asignar diferentes valores.
En general, una variable es cualquier letra involucrada en una expresión algebraica.

Algunas expresiones en lenguaje algebraico.

- El doble de a $2a$
- El triple de a $3a$
- El cuádruple de a $4a$
- Un medio de a (o la mitad) $\frac{a}{2}$
- Un tercio de a (o la tercera parte) $\frac{a}{3}$
- Un cuarto de a (o la cuarta parte) $\frac{a}{4}$
- El cuadrado a^2
- El cubo a^3
- La cuarta potencia (o a la cuarta) a^4
- La quinta potencia (o a la quinta) a^5
- Un número par $2n$
- Un número impar $2n - 1$
- a aumentado en b $a + b$
- a disminuido en b $a - b$
- El producto entre a y b $a \cdot b$

Escriba las siguientes expresiones en lenguaje algebraico:

a) El doble de un número, aumentado en la mitad del mismo número. R:_______________

b) El doble de a, aumentado en b R:_______________

c) La mitad de a más el triple de b. R:_______________

d) El doble del cuadrado de a. R:_______________

e) El cuadrado del doble de a. R:_______________

f) El triple de la cuarta parte del cuadrado de b. R:_______________

g) La diferencia entre el quíntuple de x y la mitad de y. R:_______________

h) La suma de tres números pares consecutivos. R:_______________

TÉRMINO ALGEBRAICO

Se llama término (algebraico) a un conjunto de números y letras que se relacionan entre sí por medio de la multiplicación y/o división.
Ejemplos:

$$2a^2b\ ,\ \frac{3a}{p}\ ,\ -\frac{5}{7}x^2y^2z$$

El término algebraico consta de un FACTOR NUMÉRICO, un FACTOR LITERAL y un GRADO.
El grado es la suma de los exponentes de las letras que aparecen en el término.
Ejemplo:
En el término $-\frac{12}{17}a^6b^4c^2$ el coeficiente numérico es $-\frac{12}{17}$; el factor literal es $a^6b^4c^2$ y el grado es 12 (6+4+2).

Completa el siguiente cuadro:

Expresión	**Coeficiente Numérico.**	**Factor Literal**	**Grado**
-x			
-987xy			
x^3y^4			
$-65x^3y^0$			
$3z^2y^7x^{23}$			
$-3\,z\,x^{23}$			
$-\frac{65}{52}\cdot \text{jah}$			

EXPRESIÓN ALGEBRAICA

Se llama EXPRESIÓN ALGEBRAICA a cualquier suma o resta de términos algebraicos. Si la expresión tiene dos términos, entonces es un BINOMIO; si tiene tres términos se llama TRINOMIO; si tiene cuatro o más, hablamos de POLINOMIOS. (El término POLINOMIO se puede usar en forma general para cualquier expresión algebraica.)

Clasifica cada una de las siguientes expresiones algebraicas según el número de términos que la integran:

a) $5x$ R:_______________

b) $a^2 + b - c$ R:_______________

c) $\frac{x^2y^3}{4}$ R:_______________

d) $2 - x$ R:_______________

e) $2x - 3y^2$ R:_______________

f) $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ R:_______________

g) $m^2 - n^2$ R:_______________

Valorización de expresiones algebraicas
Las expresiones algebraicas no representan valores en sí, sino que pueden ser evaluadas para distintos valores que se les asignen a las letras que las componen.
Ejemplos:

1. El valor del monomio $\mathbf{a^2b}$ cuando **a = 2** y **b = 5** es $2^2 \bullet 5 = 20$.
   Reemplazamos directamente las letras a y b por los valores asignados; en este caso, 2 y 5, y realizamos las operaciones indicadas.

2. El valor del mismo monomio $\mathbf{a^2b}$ cuando **a = 3** y **b = – 4** es:
   $3^2 \bullet (-4) = 9 \bullet -4 = -36$

3. Si **x = – 2**; **y = 5** y **z = 4**, el valor de **2x + 3y – z** es:
   $2 \bullet -2 + 3 \bullet 5 - 4 = -4 + 15 - 4 = 7$

4. Si **m** es el doble de **n**, **n** es el cuadrado de **p** y **p** = 3, determinemos **m** y **n**:
   Aquí tenemos: **m = 2n**; $\mathbf{n = p^2}$ y **p = 3**, entonces $\mathbf{n = 3^2 = 9}$ y **m = 2n = 2 • 9 = 18**.
   Así; **n = 9** y **m = 18**.

Ejercicios:

1. Si **a = 3** y **b = 2**, determine el valor de:

   a) $2ab$

   b) $a^2 - b^2$

   c) $b^2 - a^2$

   d) $a^2 + ab + b^2$

   e) $-2ab$

   f) $a^3 - b^3$

   g) $-b^5$

   h) $1 + a + b + ab$

   i) $a^2 + b^2 - a - b$

2. Si **x = 4**, **y = –2** y **z = 5**, determine el valor de:

   a) $2x + y + z$

   b) $x - y - 2z$

   c) $x + y - x + z$

   d) $x\,(x^2 + y^2 + z^2)$

   e) $2x^2y - 2x\,z^2$

   f) $x^2 - 1$

   g) $(z^2 - 2) + (z^2 - 3)$

   h) $(3 - xyz) + (2 - xyz)$

   i) $x^2 - y^4 + z$

REDUCCIÓN DE TÉRMINOS SEMEJANTES Y USO DE PARÉNTESIS

Se llaman TÉRMINOS SEMEJANTES aquellos que tienen el mismo factor literal (y por consiguiente el mismo grado); sólo pueden diferir en el coeficiente numérico.Dos términos son semejantes cuando tienen el mismo factor literal.

Ejemplo 1. Son términos semejantes:

$$a^2,\ 2a^2,\ –3a^2,\ 0{,}5a^2,\ \frac{a^2}{4}$$

Ejemplo 2. No son términos semejantes:

$$a^2b \text{ y } ab^2,\ –a \text{ y } –a^2,\ 2ab \text{ y } ab^2$$

Vemos que en el **ejemplo 1**, el factor literal de todos ellos es $\mathbf{a^2}$; por esta razón son todos semejantes.

En el **ejemplo 2**, en cambio, tenemos en los tres casos factores literales diferentes entre sí.

En una expresión algebraica SÓLO podemos reducir aquellos términos que son semejantes y esto se efectúa sumando (o restando) los coeficientes numéricos y manteniendo el factor literal.

El uso de paréntesis es frecuente en álgebra. Sirve para separar expresiones algebraicas y se elimina de acuerdo con las siguientes reglas:

1. Si está precedido de un signo + o no tiene signo escrito, se elimina sin hacer ningún cambio.

2. Si está precedido de un signo – se elimina después de cambiar TODOS los signos de los términos del interior del paréntesis. (Es importante hacer notar que al eliminar el paréntesis también se elimina el signo – que lo antecede.)

Si una expresión algebraica contiene paréntesis, es conveniente eliminarlo antes de proceder a reducir los términos semejantes.

Ejemplos:

a) $a + 2a + 3a$

Los tres términos de la expresión son semejantes; por lo tanto, sumamos sus coeficientes numéricos y conservamos el factor literal:

$a + 2a + 3a = 6a$

b) $2a + 3b – 5a + 6b$

Aquí los términos 2a y – 5a son semejantes entre sí y lo mismo ocurre con 3b y 6b; entonces los podemos agrupar entre sí y obtenemos:

$2a + 3b – 5a + 6b = (2a – 5a) + (3b + 6b) = – 3a + 9b$

c) $3x^6y – 5xy^6 – 7x^6y – x^6y + 11xy^6$

Agrupamos los términos según su semejanza y obtenemos:

$(3x^6y – 7x^6y – x^6y) + (– 5xy^6 + 11x\, y^6) = – 5x^6y + 6xy^6$

d) $5m + (3m – 7n) – 2n$

Antes de proceder a la reducción de términos es necesario eliminar el paréntesis; como éste está precedido de un signo +, lo eliminamos sin hacer cambios y obtenemos:

$5m + 3m – 7n – 2n = 8m – 9n$

e) $3x^2y – (x^2y – 2xy^2) + 3x^2y$

En este caso, al eliminar el paréntesis (y el signo que lo precede) debemos cambiar los signos de los términos del interior; nos queda:

$3x^2y – x^2y + 2xy^2 + 3x^2y$

$(3x^2y – x^2y + 3x^2y) + 2xy^2 = 5x^2y + 2xy^2$

f) $a + a^2 + a^3 + a^4$

Aquí no es posible hacer ninguna reducción pues no existen términos semejantes.

Si en una expresión nos encontramos con paréntesis dentro de otros paréntesis, procedemos a eliminarlos desde dentro hacia afuera atendiendo a la misma regla.

g) $2ab – [3a – (–2ab + 3a) – ab]$

Eliminamos primero el paréntesis interior:

$2ab –[3a + 2ab – 3a – ab]$

Ahora eliminamos el exterior:

$2ab – 3a – 2ab + 3a + ab$

$(2ab – 2ab + ab) + (– 3a + 3a) = ab$

Ejercicios:

1. **Reduce las siguientes expresiones algebraicas:**

   a) $m + 2m$

   b) $a + 2a + 9^a$

   c) $m^2 – 2m^2 – 7m^2$

   d) $6x^2y^2 – 12x^2y^2 + x^2y^2$

   e) $3a - 2b – 5b + 9a$

   f) $a^2 + b^2 – 2b^2 – 3a^2 – a^2 + b^2$

   g) $x^2yz + 3xy^2z – 2xy^2z – 2x^2yz$

   h) $2x – 6y – 2x – 3y – 5y$

   i) $15a + 13a - 12b – 11a -4b – b$

   j) $a + a^2 + a^3 + a^4 – a – 2a^2 + 3a^3 – 4a^4$

   k) $1 + x + xy – 2 + 2x – 3xy – 3 + 2xy – 3x$

2. **Elimina paréntesis y reduce términos semejantes:**

   a) $(a + b) + (a – b)$

   b) $2a - (2a - 3b) – b$

   c) $4 – (2a + 3) + (4a + 5) – (7 – 3a)$

   d) $(-2x^2 + 3y – 5) + (-8x^2 – 4y + 7) – (-9x^2 + 6y – 3)$

   e) $3x + 2y - [x – (x – y)]$

   f) $–(a + b – c) – (-a – b – c) + (a – b + c)$

   g) $[-(x^2 – y^2) + 2x^2 – 3y^2 – (x^2 – 2x^2 – 3y^2)]$

   h) $3x + 2y - \{2x - [3x – (2y – 3x) – 2x] - y\}$

   i) $3y – 2z – 3x - \{x - [y – (z – x)] - 2x\}$

   j) $16a + \{-7 – (4a^2 – 1)\} - \{-(5a + 1) + (-2a^2 + 9) – 6a\}$

   k) $25x - [-\{-(-x – 6) – (-3x – 5) - 10\} + \{-(2x + 1) + (-2x – 3) - 4\}]$

   l) $-\{-[(5a + 2) + (3a – 4) – (-a + 1)] + (4a – 6)\}$

   m) $-\{-[-(-7x – 2y)]\} + \{-[-(2y + 7x)]\}$

3. **Resuelve:**

   a) Si $P = x^2 + 3x – 2$ y $Q = 2x^2 – 5x + 7$, obtener $P + Q$; $P – Q$; $Q – P$.

   b) Si $P = x^3 – 5x^2 – 1$; $Q = 2x^2 – 7x + 3$ y $R = 3x^3 – 2x + 2$, obtener $P + Q – R$; $P – (Q – R)$

MULTIPLICACIÓN ALGEBRAICA

Multiplicación de potencias.
La expresión $\mathbf{a^n}$ se llama potencia de base “a” y exponente “n”. Se cumple:

$$a^n \bullet a^m = a^{n+m}$$

$$(a^n)^m = a^{n \bullet m}$$

$$a^0 = 1 \text{ con } a \neq 0$$

$$(ab)^n = a^n \bullet b^n$$

Multiplicación de 2 o más monomios.
Multiplicamos los coeficientes numéricos y los factores literales entre sí (hacemos uso de las propiedades asociativa y conmutativa de la multiplicación).

Multiplicación de un monomio por un polinomio.
Multiplicamos el monomio por cada término del polinomio (hacemos uso de la propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la adición).

Multiplicación de dos polinomios.
Multiplicamos cada término del primer polinomio por cada término del segundo. Siempre que sea posible, es necesario reducir términos semejantes.

Ejemplos:

a) $a^6 \bullet a^7 = a^{6+7} = a^{13}$

b) $(ab)^4 = a^4 \bullet b^4$

c) $x^5 \bullet x^9 \bullet x^4 = x^{5+9+4} = x^{18}$

d) $2a^2 \bullet 3ab = 2 \bullet 3 \bullet a^2 \bullet a \bullet b = 6a^3b$

e) $-5x^2 y^4 \bullet -3x^6 \bullet -2y^6 = -5 \bullet -3 \bullet -2 \bullet x^2 \bullet x^6 \bullet y^4 \bullet y^6 = -30x^8 y^{10}$

f) $-4a^2b\,(a^2 + ab - b) = -4a^2b \bullet a^2 - 4a^2b \bullet ab - 4a^2b \bullet (-b)$

$= -4a^4b - 4a^3b^2 + 4a^2b^2$

g) $(3m^5 - 2m^4 - mp) \bullet -3m = 3m^5 \bullet (-3m) - 2m^4 \bullet (-3m) - mp \bullet (-3m)$

$= -9m^6 + 6m^5 + 3m^2p$

h) $(2x + y)(3x + 2y) = 2x\,(3x + 2y) + y\,(3x + 2y)$

$= 2x \bullet 3x + 2x \bullet 2y + y \bullet 3x + y \bullet 2y$

$= 6x2 + 4xy + 3yx + 2y2$

$= 6x2 + 7xy + 2y2$

(los términos 4xy y 3yx son semejantes, por lo tanto deben reducirse).

Efectúe las siguientes operaciones:

1) $a^2 \bullet a^3$

2) $m^3 \bullet m^4 \bullet m^5$

3) $x^2 \bullet x^3 \bullet x^3$

4) $a \bullet ab$

5) $xy \bullet x^2y$

6) $a \bullet a^2b \bullet a^3b^2$

7) $2a \bullet ab^6$

8) $3xy^2 \bullet 5x^2y^3$

9) $2m \bullet 5n$

10) $ax \bullet - axy$

11) $- 2x \bullet 3xy \bullet - 2x$

12) $- 3a^2b \bullet - 5abc \bullet c^4$

13) $7abc \bullet - 2a^2bc^8$

14) $m^2p \bullet - m$

15) $abc \bullet 2abc$

16) $3x^2y \bullet x^3y^6 \bullet - y$

17) $- 4abc \bullet - 3a^2b^2 \bullet 12ab^5c^7$

18) $2pr \bullet 3pr^5 \bullet pr^2 \bullet 7p^3r^4$

19) $- 6x^3 \bullet - 6x^3$

20) $- 2ax^4 \bullet - 3ax^5 \bullet - 3a^2x^4$

21) $3a (a - 2b)$

22) $- 5x (2 - 3x^2 - 5x)$

23) $7b (2a - b)$

24) $3x^2 (3x^6 - 2x^4 + x^3 - 2x + 3)$

25) $- 6x^5y^3 (3x^2y - 4xy^4 - 2x^2 y^2)$

26) $(4xy - 5xy^4) \bullet - 6xy$

27) $(3m^2 - 2mn + n^6) \bullet 13m^4n^2$

28) $- 15m^2np^4 (mn^6p^2 - m^4n^4p^2 + mnp)$

29) $6m^2(2m - 5n) - 3m(6m^2 + 4n)$

30) $p^2q^4(2pq - pq^3 - 1) + 3p^3q^2 (q^3 - q^5 + p^2)$

31) $(x + y)(x^2 + y^2)$

32) $(2a + b)(3a – 2b)$

33) $(1 – x)(1 – y)$

34) $(2x – 6y)(x^2 – 2xy)$

35) $(x^2 + 3x^2y)(– 3xy^2 + 4xy^3)$

36) $(4x + y)(– 2x – 5xy)$

37) $(6a – 5b)(2b + 7a)$

38) $(a + b + 1)(a – b)$

39) $(2a – 3ab + b^2)(b – b^2)$

40) $(5x^2y + 2xy^2 – 3xy)(x – y^2)$

41) $(m^2 + n^2 – mn)(2m – 3n)$

42) $(– 3xy – 2xy^2)(xy^2 – 5xy)$

43) $(2p^2q + 3pq^{11} – 5pq^4)(– 3pq + 2p)$

44) $(x^2 + 1)(x^2 – 1)$

45) $(a + b)(a – b)$

46) $(x + 4)(x – 6)$

47) $(a^2 + 5)(a^2 + 7)$

48) $(2p – 4)(2p + 7)$

49) $(2x – 3y – 4z)(x + y + z)$

50) $(x^2 + y^2 – z^2)(2x – 3y – 4z)$