



## NÚMEROS COMPLEJOS I . NIVEL TERCEROS MEDIOS

En la resolución de ecuaciones es necesario precisar el conjunto en el que se está trabajando, lo que determina si existe la solución o no.

En la ecuación  $2x + 3 = 10$ , la solución es  $x = 3,5$ . Podemos decir que esta ecuación tiene solución en los números racionales, pero no en los enteros, ni en los naturales.

La ecuación  $x^2 + 1 = 0$  no tiene solución en los números reales. Para precisar el conjunto al que pertenecen estas soluciones se define la **unidad imaginaria  $i$** , como un número tal que

$$i^2 = -1$$

El conjunto al que se hace referencia es el de los números complejos y se denota por  $\mathbb{C}$ . Los números reales son un subconjunto de los números complejos.

Un número complejo  $z$  es toda expresión que se pueda escribir de la forma  $z = a + bi$ , donde  $a$  y  $b$  son números reales e  $i$  es la unidad imaginaria.

$a$  se llama parte real de  $z$  y se denota  $Re(z)$ .

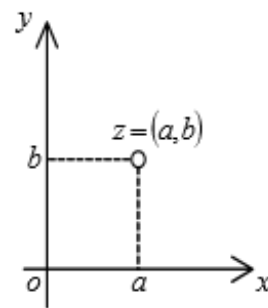
$b$  se llama parte imaginaria de  $z$  y se denota por  $Im(z)$

Ejemplo:  $z_1 = -4 + \sqrt{2}i$ , donde  $Re(z_1) = -4$  e  $Im(z_1) = \sqrt{2}$

Los números complejos también se pueden definir como par ordenado:  $\mathbb{C} = \{ (a, b) / a \in \mathbb{R} \wedge b \in \mathbb{R} \}$

$$a + bi = (a, b)$$

Estos números se pueden representar geoméricamente como puntos de un plano cartesiano. Existe una relación biunívoca entre los elementos del conjunto  $\mathbb{C}$  y el conjunto de puntos del plano.



**Igualdad de complejos:** Por ser par ordenado, se debe verificar que las partes reales sean iguales entre si y las partes imaginarias también deben ser iguales entre si.

Si  $z_1 = (a, b) \wedge z_2 = (c, d) \Rightarrow (z_1 = z_2) \Leftrightarrow (a = c \wedge b = d)$

**Adición:** Sumar las componentes reales entre si y las componentes imaginarias entre si.

$$[ z_1 = (a, b) \wedge z_2 = (c, d) ] \Rightarrow [ z_1 + z_2 = (a + c, b + d) ] \text{ o también}$$

$$[ z_1 = a + bi \wedge z_2 = c + di ] \Rightarrow [ z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i ]$$

### Producto:

$$[ z_1 = (a, b) \wedge z_2 = (c, d) ] \Rightarrow [ z_1 \cdot z_2 = (ac - bd, ad + bc) ]$$

$$[ z_1 = a + bi \wedge z_2 = c + di ] \Rightarrow [ z_1 \cdot z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)i ]$$

El conjunto de los números complejos con las operaciones de suma y producto tiene estructura de Campo.

$$\forall z = (a, b) \in \mathbb{C}$$

- La suma y el producto son cerradas en  $\mathbb{C}$
- La suma y el producto en  $\mathbb{C}$  cumplen la propiedad asociativa.
- La suma y el producto en  $\mathbb{C}$  cumplen la propiedad conmutativa.
- El neutro de la suma es el  $(0,0)$ .
- El neutro de la multiplicación es  $(1,0)$
- El inverso de la suma es  $-z = (-a, -b)$
- El inverso de la multiplicación es  $z^{-1} = \left( \frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2} \right)$
- Se cumple la distributividad del producto sobre la suma.

Observaciones:

- El elemento  $(0,0)$  no tiene inverso multiplicativo.
- Tener presente que  $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$  sólo para  $a$  y  $b$  no negativos.  
Ejemplo :  $\sqrt{-4} \cdot \sqrt{-2} = 2i \cdot \sqrt{2}i = 2\sqrt{2}i^2 = -2\sqrt{2}$
- Sean  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$  definiremos  $z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot z_2^{-1}$$

- Sea  $z = (a, b)$  definiremos el ponderado de un real por un complejo mediante:  $kz = k(a, b) = (ka, kb)$

### Conjugado de un número complejo:

Sea  $z = a + bi$  un número complejo. Se define el conjugado de  $z$  y se representa por  $\bar{z}$  como el número  $a - bi$ .

Propiedades (Demostrar)

- $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$
- $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$
- $z + \bar{z} = 2\text{Re}(z)$
- $z - \bar{z} = 2i\text{Im}(z)$
- $\bar{\bar{z}} = z$
- $z \cdot \bar{z} = (\text{Re}(z))^2 + (\text{Im}(z))^2$ . Por ello si  $z \neq 0$  entonces  $z \cdot \bar{z} > 0$

## Módulo de un número complejo:

Se define el módulo del número complejo  $z = a + bi$  y se representa por  $|z|$  como el número real  $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Propiedades (demostrar)

- $|z| = |-z| = |\bar{z}|$
- $|z|^2 = z\bar{z}$
- $|zw| = |z||w|$
- $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$  con  $w \neq 0 + 0i$
- $|z + w| \leq |z| + |w|$

## Ejercicios

1) Escribe los siguientes complejos en forma de par ordenado y representa gráficamente:

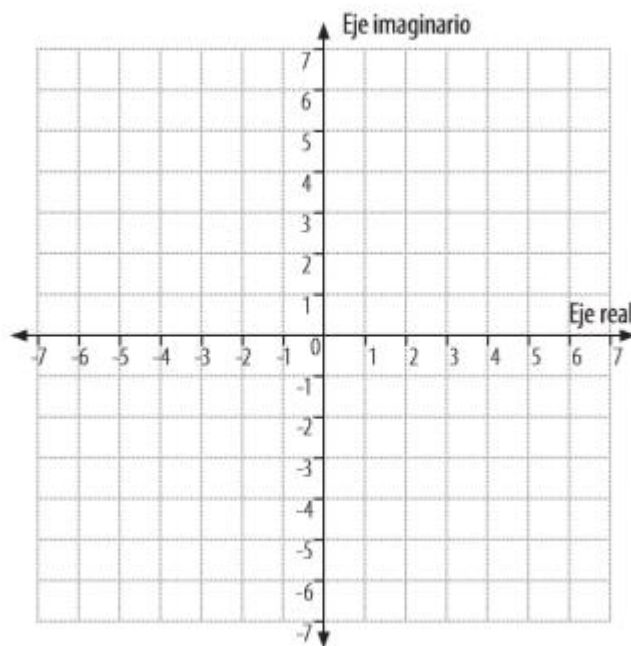
a)  $z_1 = 3 - 4i$        $z_1 = ( \quad , \quad )$

b)  $z_2 = -1 - 6i$        $z_2 = ( \quad , \quad )$

c)  $z_3 = 5 - 5i$        $z_3 = ( \quad , \quad )$

d)  $z_4 = -1 + 3i$        $z_4 = ( \quad , \quad )$

e)  $z_5 = 1 - 3i$        $z_5 = ( \quad , \quad )$



2) Encuentra el valor de  $x$  y de  $y$  en los siguientes casos :

a)  $(3, x) = (3, 5)$

b)  $(x + 3, 2y) = (y, 2 + x)$

c)  $(x^2 - 5x + 6, 6) = (0, 6)$

d)  $\frac{1}{2}x + \frac{2}{3}yi = 1 - 2i$

e)  $\frac{3x+7yi}{4} = \frac{2x+1+i(8y-12)}{5}$

3) Efectúa las siguientes operaciones:

a)  $(-6,5) + (-3,4) =$

b)  $(-1,3) - (5,7) =$

c)  $(-4,-5) + (-3,-9) =$

d)  $(-4,-5) - (-12,1) =$

e)  $(-7,-8) + (-5,6) - (-2,-1) =$

f)  $(5,-3) - (7,-1) + (10,8) =$

g)  $(7,-3) \cdot (-2,5) =$

h)  $(-9,-5) \cdot (-8,-9) =$

i)  $(12,-5) \cdot (12,-5) - (13,3) \cdot (13,-8) =$

j)  $(3,-8) : (2,-3) =$

k)  $(1,-4) : (-5,-3) =$

l)  $(7,0) : (0,1) =$

m)  $\frac{(2,1)}{(0,1)} \cdot \frac{(3,0)}{(1,-1) \cdot (1,1)} =$

n)  $\frac{(1,-1)^2}{(3,0)} \cdot \frac{(2,5)}{(1,1)} =$

o)  $\frac{(\sqrt{3},1)}{(1,\sqrt{3})} =$

p)  $\frac{(\sqrt{2},\sqrt{3})^2}{(2,0)} =$

4) Realiza las siguientes operaciones :

a)  $(2 + 5i) + (3 + 4i) =$

b)  $(1 + i) + (1 - i) =$

c)  $(2 + 5i) - (3 + 4i) =$

d)  $(1 + i) - (1 - i) =$

e)  $(2 + 5i)(3 + 4i) =$

f)  $(1 + i)(-1 - i) =$

g)  $\frac{2+5i}{3+4i} =$

h)  $\frac{2-5i}{i} =$

i)  $(3 + 4i)^2 =$

j)  $(1 - i)^2 =$

k)  $(-3 + i)^2 =$

l)  $(-2 - 5i)^2 =$

5) Calcular las potencias de:

a)  $i^{125} =$

b)  $i^{2344} =$

c)  $i^{723} =$

d)  $i^{77} =$

e)  $\frac{1}{i} =$

f)  $\frac{1}{i^2} =$

g)  $\frac{1}{i^3} =$

h)  $i^{-4} =$

i)  $i^{-5} =$

j)  $\frac{1}{i} + \frac{1}{i^2} + \frac{1}{i^3} + \frac{1}{i^4} =$

k)  $\frac{1}{i} + \frac{1}{i^2} + \frac{1}{i^3} + \frac{1}{i^4} + \frac{1}{i^5} + \frac{1}{i^6} + \frac{1}{i^7} + \frac{1}{i^8} =$

l)  $(i^{-3} - i^{-5})^{-2} =$

- 6) Si  $z = a + bi$ , determinar  $[1 - \operatorname{Re}(z) + \operatorname{Im}(z)i] \cdot [1 - \operatorname{Re}(z) - \operatorname{Im}(z)i] =$
- 7) ¿Para qué valor de  $m$ , el producto  $(3, 2)(m, -4)$  es un número imaginario puro?
- 8) Determinar  $x$  para que el producto  $(2, -5)(3, x)$  sea un número real.
- 9) Sean  $z_1 = (a, 5)$  y  $z_2 = (b, -3)$ , sabiendo que el producto de dichos números complejos es  $(21, 1)$  calcular los valores enteros de  $a$  y  $b$
- 10) Sean  $z_1 = a + 5i$  y  $z_2 = b - 3i$ , sabiendo que el producto de dichos números complejos es  $63 - 16i$  calcular los valores enteros de  $a$  y  $b$
- 11) Dados los números complejos  $2 - mi$  y  $3 - ni$ , hallar los valores que deben tomar  $m$  y  $n$  para que su producto sea el complejo  $8 + 4i$
- 12) Hallar  $a$  y  $b$  para que se cumpla  $(a - 3i) = \frac{2+bi}{5-3i}$
- 13) Si  $z = 4 - 3i$ , encontrar la parte real de  $\frac{1}{z^2}$
- 14) Determine  $z \in \mathbb{C}$  tal que  $z^2 = i$
- 15) Determine  $z \in \mathbb{C}$  tal que  $z^2 = 1 + i\sqrt{3}$
- 16) Encuentra el valor de  $z$   
 $4z + (2i - 3)^2 = (2i - 3) \cdot z + (4 - 1)$
- 17) Dado el número complejo  $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ , comprobar que  $\frac{1}{z} = z^2$
- 18) Dado el número complejo  $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ , comprobar que  $1 + z + z^2 = 0$
- 19) Escribe en todas las formas que conoces las soluciones de la ecuaciones:  
 a)  $\frac{z}{2i} + \frac{z+1}{4-2i} = 3$   
 b)  $\frac{z}{2i} + \frac{z+1}{4-2i} = 3$
- 20) Comprobar que  $2 - i$  y  $2 + i$  son las soluciones o raíces de la ecuación  $z^2 - 4z + 5 = 0$
- 21) Calcular el conjugado y el valor absoluto de  $z = \sqrt{3} - \sqrt{2}i$

22) La suma de dos números complejos conjugados es 8 y la suma de sus módulos es 10 ¿Cuáles son esos números?

23) Dados los complejos  $z_1 = 3 + 2i$        $z_2 = 4 + i$        $z_3 = -2i$        $z_4 = 1 - i$ , encontrar

a)  $|z_3 \cdot z_2| =$       b)  $|\bar{z}_1 - z_2| =$       c)  $|\overline{z_1 - z_3}| =$       d)  $|\bar{z}_3 + \bar{z}_4| =$       e)  $\frac{1}{|z_1|} - \frac{1}{|z_2|} =$

24) Si  $z = a + bi$ , encontrar la parte real e imaginaria de  $\frac{1-\bar{z}}{1+z} =$

25) Si  $z = \frac{1}{3} - \frac{1}{2}i$ , entonces el valor de  $z \cdot \bar{z} + 3(z + \bar{z}) =$

26)  $\left| \frac{(8-i)(-2+7i)(1+4i)}{(2-7i)(1-4i)} \right| =$

27)  $\left| \frac{(6+7i)(4-2i)}{4+2i} \right| \left| \frac{1}{7+6i} \right| =$

28) Si  $z \neq a + bi = 0$  entonces  $\left| \frac{1-z}{z-1} \right| = 1$

29) Determine  $z \in \mathbb{C}$  tal que  $|z| = \frac{1}{|z|} = |1 - z|$

30) Demuestra que si los números complejos  $z$  y  $w$  cumplen con  $|z + w| = |z - w|$ , entonces  $\frac{z}{w}$  es un número complejo cuya parte real es cero.

31) Determina cuatro números complejos que satisfagan la ecuación  $|z - 4i| = 1$ . Representar gráficamente

32) Dados los complejos de la figura, resuelve los siguientes ejercicios:

- a)  $(z_1 + z_2) \cdot z_5 =$
- b)  $(z_3 - z_4)^2 =$
- c)  $i^{97}(z_5 - 2z_2 + z_3) + i^{37}(z_4 - z_1) =$
- d) Calcula el ángulo que forma con el eje real el complejo  $\sqrt{z_1 \cdot z_3}$
- e) Calcula el módulo del complejo  $\frac{(z_1 + z_3)}{z_2}$

