Instituto Nacional

2019

Instituto Nacional
Departamento de Matemática
Profesora: Esperanza Guzmán C.

“SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS Y TEOREMA DE THALES”

1.- Polígonos Semejantes: “Dos polígonos convexos son semejantes, si y solo si los ángulos correspondientes son congruentes y las razones entre los lados homólogos son iguales.

2.- Razón entre los perímetros de polígonos semejantes. Dados dos polígonos semejantes aun cuando no sean regulares, se cumple que sus perímetros están en la razón que hay entre cualquier par de lados homólogos.

3.- Teorema Particular de Thales.
“ Si una recta es paralela a un lado de un triángulo e intersecta en dos puntos diferentes a los otros dos lados, entonces determina sobre ellos segmentos proporcionales.”

4.- Teorema fundamental de la semejanza de triángulos.
“Toda recta paralela a uno de los lados de un triángulo origina un triángulo semejante al primero”.

5.- CRITERIO DE SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS

5.1. CRITERIO (AA)
Dos triángulos son semejantes si dos de sus ángulos correspondientes son congruentes.

5.2. CRITERIO (LLL)
Dos triángulos son semejantes si los tres lados de uno de ellos son proporcionales a los tres lados correspondientes del otro.

5.3. CRITERIO (LAL)
Dos triángulos son semejantes si dos lados de un triángulo son proporcionales a los dos lados homólogos del otro triángulo y el ángulo comprendido entre estos dos lados es congruente al ángulo homólogo en el otro triángulo.

5.4. CRITERIO (LLA)
Dos triángulos son semejantes si dos lados de un triángulo son proporcionales a los dos lados homólogos del otro triángulo y el ángulo opuesto al mayor de los lados es congruente al ángulo homólogo en el otro triángulo.

NOTA: Si dos triángulos (Δ_1, Δ_2) cumplen cualquiera de estos tres criterios (notar que si cumplen alguno de ellos inmediatamente cumplen los dos restantes) diremos que (Δ_1, Δ_2) son semejantes y anotamos:

$$\Delta_1 \sim \Delta_2$$

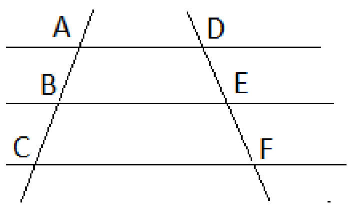
6.- Razón entre las alturas de triángulos semejantes.

"Si dos triángulos son semejantes, entonces sus alturas correspondientes son proporcionales a los lados respectivos."

7.- TEOREMA GENERAL DE THALES

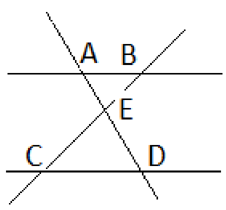
Si $\overline{AD} \,//\, \overline{BE} \,//\, \overline{CF}$, $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{EF}}$

, entonces:

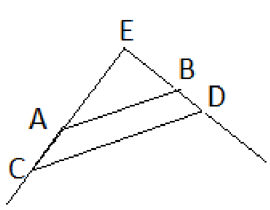


8.- CASOS PARTICULARES DEL TEOREMA DE THALES

a) Si , $\overline{AB} \,//\, \overline{CD}$ entonces: $\frac{\overline{AE}}{\overline{ED}} = \frac{\overline{BE}}{\overline{EC}}$

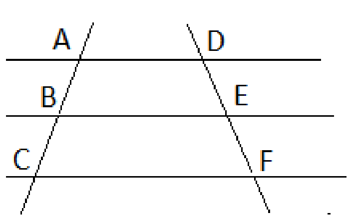


b) Si $\overline{AB} \,//\, \overline{CD}$, entonces: $\frac{\overline{EA}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{EB}}{\overline{BD}}$



9.- RECÍPROCO DEL TEOREMA DE THALES

Si $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{EF}}$, entonces: $\overline{AD} \,//\, \overline{BE} \,//\, \overline{CF}$



<u>10.- Razones entre segmentos determinados por las bisectrices en un triángulo</u>

10.1.- **Teorema de la bisectriz interior:**
"La bisectriz de un ángulo interior del triángulo divide interiormente el lado opuesto en dos segmentos, cuyas medidas son proporcionales a las de los lados del correspondientes ángulo del triángulo"

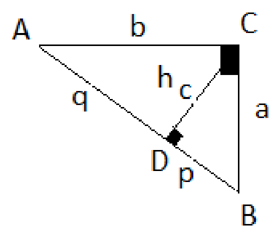
10.2.- **Teorema de la bisectriz exterior:**

“ La bisectriz de un ángulo exterior del triángulo divide exteriormente el lado opuesto en dos segmentos, cuyas medidas son proporcionales a las de los lados del correspondiente ángulo interior del triángulo.”

11.- **Relaciones Métricas en el Triángulo Rectángulo**

11.1.- Proyección de segmentos en una recta.

11.2.- Proyección de segmentos en un triángulo.



Al trazar la altura h_c en un triángulo ACB, quedan proyectados los dos catetos sobre la hipotenusa.
Las proyecciones de los catetos “a” y “b” son “p” y “q”, respectivamente.

“p” es la medida de la proyección de “a”.
“q” es la medida de la proyección de “b”.
Observe que: p + q = c

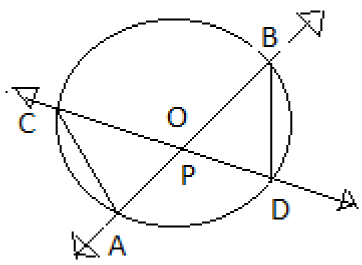
12.- **Semejanza Aplicada en el Triángulo Rectángulo.**
El estudio de la semejanza de triángulos, particularmente la de triángulos rectángulos, nos lleva a la formulación y demostración de importantes teoremas de la Geometría Euclideana.

12. 1. **Teorema Fundamental**
“En un triángulo rectángulo, la altura correspondiente a la hipotenusa determina dos triángulos semejantes entre sí y semejantes al triángulo inicial.”
12.2.- **Teorema de Euclides referido a un cateto.**
“En un triángulo rectángulo, la medida de cada cateto es **media proporcional geométrica** entre las medidas de la hipotenusa y su proyección sobre ella.”

12.3.- **Teorema de Euclides referido a la altura.**
“En un triángulo rectángulo la altura correspondiente a la hipotenusa es **media proporcional geométrica** entre los segmentos que dicha altura determina en ella.”
12.4.- **Teorema de la razón de los cuadrados de los catetos.**
“En un triángulo rectángulo, la razón entre los cuadrados de las medidas de los catetos es igual a la razón entre las medidas de las proyecciones de ellos sobre la hipotenusa”

13.- **Relaciones Métricas en la circunferencia.**

13.1.- **Teorema de las cuerdas.**
“Si dos cuerdas se intersectan en un punto interior de la circunferencia, este determina segmentos en ella, de manera que el producto de las medidas de los segmentos de una de las cuerdas es igual al producto de las medidas de los segmentos de la otra.”



Tesis:

$\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PC} \cdot \overline{PD}$ (Por demostrar)

Del teorema anterior se deducen los siguientes corolarios:

Corolario N°1
"Si dos cuerdas se intersectan en un punto interior de la circunferencia de modo que una dimidia a la otra, entonces la medida de uno de los segmentos de la cuerda dimidiada es media proporcional geométrica entre las medidas de los segmentos de la otra."

Corolario N°2
" Si un diámetro de la circunferencia intersecta perpendicularmente a una cuerda, entonces esta se dimidia."

13.2.- **Teorema de las secantes**.

" Si desde un punto **P** cualquiera exterior a una circunferencia se trazan dos secantes, entonces los productos de las distancias desde P a los puntos de intersección de cada secante con la circunferencia son iguales."

13.3.- **Teorema de la tangente y la secante.**
"Si desde un punto **P** cualquiera exterior a una circunferencia, se trazan una tangente y una secante, entonces el cuadrado de la medida de la distancia desde ese punto **P** al punto de tangencia, es igual al producto de la distancia que hay desde **P** a los puntos de intersección de la secante con la circunferencia."

Instituto Nacional

2019

EJERCICIOS

(1) Un terreno mide 144 metros cuadrados de área. Otro terreno semejante es 10 veces más grande en cuanto a área. ¿Cuánto mide el área grande?

(2) Un barco mide 250 metros de largo. Otro barco menor semejante a él mide $\frac{2}{5}$ de largo respecto del grande. ¿Cuánto mide el largo del barco menor?

(3) Una torre proyecta una sombra de 79,42 metros, y un poste de altura 3.05 metros proyecta una sombra de 5,62 metros. ¿Cuánto mide la torre?

(4) Un triángulo tiene dos lados de longitud 12,9 cm. y 22,5 cm. y el ángulo comprendido entre ellos de 30°. Otro triángulo tiene lados de 90,3 cm. y 157,5 cm. y el ángulo entre ellos dos es de 60°. ¿Cuál es la razón de semejanza si existe?

(5) En una fotografía, María y Fernando miden 2,5 cm. y 2,7 cm. respectivamente; en la realidad, María tiene una altura de 167,5 cm. ¿A qué escala está hecha la foto? ¿Qué altura tiene Fernando en la realidad?

(6) Una empresa de construcción ha realizado la maqueta a escala 1: 90 de un nuevo edificio de telefonía móvil, con forma de pirámide cuadrangular. En la maqueta, la altura de la pirámide es de 5,3 dm. Y el lado de la planta es de 2,4 dm. Calcula el volumen real del edificio expresado en metros cúbicos el resultado.

Instituto Nacional

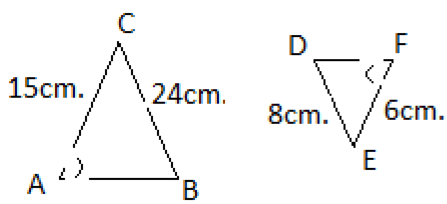
2019

TEST

1.- Si el perímetro de un triángulo de menor tamaño a otro de mayor tamaño, es de 15 cm. y la razón entre sus alturas es 7 : 21, ¿Cuál es el perímetro del triángulo de mayor tamaño?

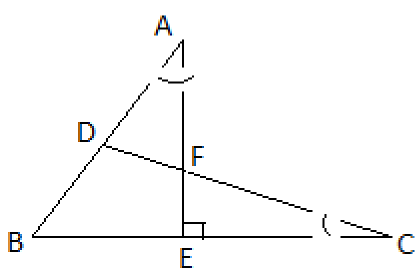
a) 90 cm.
b) 75 cm.
c) 60 cm.
d) 45 cm.
e) 30 cm.

2.- En la figura hay dos triángulos semejantes. ¿Cuál es el perímetro del triángulo de menor tamaño?



a) 5 cm.
b) 14 cm.
c) 19 cm.
d) 39 cm.
e) 57 cm.

3.- De acuerdo a la figura, ¿Cuál(es) de las afirmaciones siguientes es(son) verdadera(s)?



I) $\Delta BDC \sim \Delta BEA$
II) $\Delta DCB \sim \Delta EFC$
III) $\Delta EFC \sim \Delta DAF$

a) Sólo I
b) Sólo II
c) I y II
d) I y III

e) I, II y III

4.- La medida de los lados de un triángulo de vértices ABC son 4, 5 y 6 cm. respectivamente. ¿Cuál es la medida del lado FG si el perímetro del triángulo EFG es 60 cm y $\Delta ABC \sim \Delta EFG?$?

a) 4 cm.
b) 16 cm.
c) 20 cm.
d) 24 cm.
e) 60 cm.

5.- ¿Cuáles de los siguientes tipos de figuras son siempre semejantes entre sí?

a) Triángulo isósceles.
b) Rectángulos
c) Circunferencias
d) Pentágonos.
e) Trapecios.

6.- Si la razón entre la medida de los lados de dos triángulos semejantes es 2:5, ¿Cuál es la razón entre sus áreas?

a) 2 : 7
b) 5 : 2
c) 2 : 5
d) 25 : 4
e) 4 : 25

7.- Un trazo AB de 24 cm. es dividido interiormente por el punto Q en la razón 5 : 7. ¿Cuál es el doble de la medida de AQ?

a) 5cm.
b) 10cm.
c) 20cm.
d) 40cm.
e) 48cm.

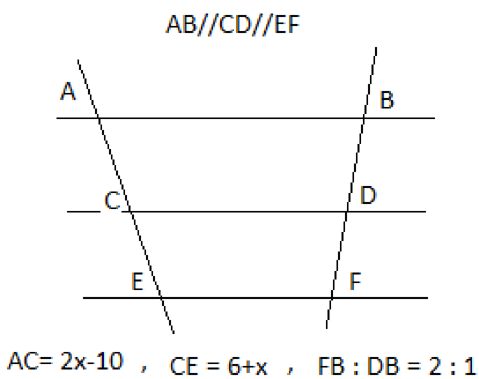
8.- Un trazo de 27cm. se divide interiormente en la razón 1:3:5. ¿Cuál es la suma de las medidas de los trazos mayor y menor que se forman?

a) 3cm.
b) 9cm.
c) 18cm.
d) 27cm.
e) 36cm.

9.- Si un trazo se divide en la razón 5 : 4 y el segmento de menor medida que se forma es de 16 cm. ,¿Cuál es la medida del trazo original?

a) 9cm. b) 16cm. c) 20cm. d) 25cm. e) 36cm.

Considera la siguiente figura para responder las preguntas 10, 11 y 12.



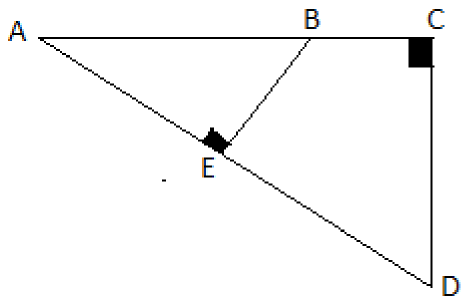
10.- ¿Cuál es la medida de AC?
a) 11cm.
b) 22cm.
c) 33cm.
d) 44cm.
e) 46cm.

5.-

11.- ¿Cuál es la medida de CE?
a) 11cm.
b) 22cm.
c) 33cm.
d) 44cm.
e) 46cm.

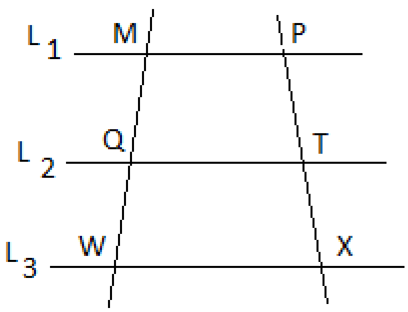
12.- ¿Cuál es la medida de AE?
a) 11cm.
b) 22cm.
c) 33cm.
d) 44cm.
e) 46cm.

13.- En la figura, AD=20cm, CD=12cm y BE= 9cm, ¿Cuál es el doble de la medida de BC?



a) 1cm.
b) 2cm.
c) 4cm.
d) 8cm.
e) 12cm.

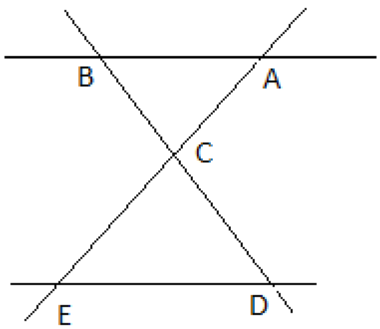
14.- En la siguiente figura, $L_1 // L_2 // L_3$. ¿Cuál(es) de las siguientes relaciones es(son) verdadera(s)?



I) MQ: QW = XT : TP
II) MQ : TQ = QW : PT
III) MQ : PT = QW : TX

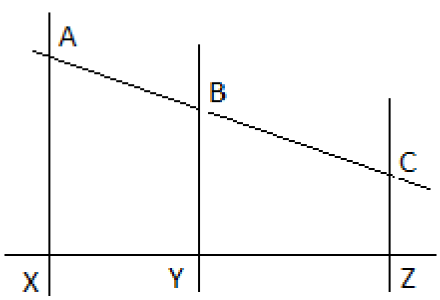
a) Sólo I
b) Sólo II
c) Sólo III
d) II y III
e) I, II y III

15.- Si AB //ED, BC = 5cm, AC = 3cm, CD = 20cm y EC = 2k+6, ¿Cuál es la medida de AE?

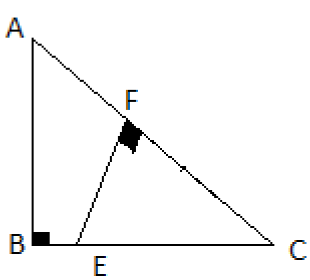


a) 3cm.
b) 6cm.
c) 9 cm.
d) 12 cm.
e) 15 cm.

16.- En la figura, AX//RY//CZ, AB= 3m-1, BC= 3m+1, XY = 10cm. y XZ = 2cm.¿Cuál es la cuarta parte de la medida de AC?



17.- Calcular el valor de EF de la siguiente figura si AB = 15cm. BC = 20cm., AF = 10cm., FC = 15cm.



a) $12\frac{1}{2}$

b) $15\frac{3}{4}$

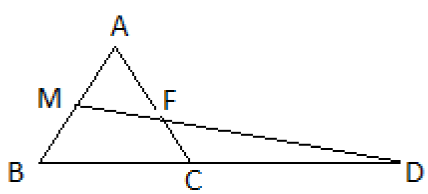
c) $13\frac{1}{4}$

d) $14\frac{11}{20}$

e) $11\frac{1}{4}$

6.-

18.- El triángulo ABC de la figura es equilátero; AM = MB = 10 y CD = 12, entonces la medida de FC =?



a) $\frac{60}{11}$

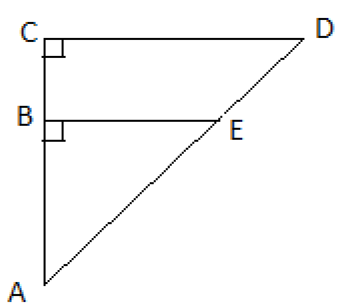
b) $\frac{59}{11}$

c) $\frac{58}{11}$

d) $\frac{57}{11}$

e) No se puede calcular.

19.- Calcular el valor de BE, en la figura, si AD = 20cm., CD = 4cm., AB = 8cm.

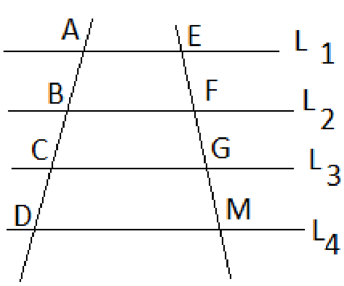


a) $\frac{\sqrt{6}}{6}$
b) $\frac{\sqrt{6}}{3}$
c) $\frac{2\sqrt{6}}{3}$
d) $\frac{\sqrt{6}}{2}$
e) 2

20.- Si los catetos de un triángulo rectángulo miden respectivamente 12 y 5cm. ; entonces la altura correspondiente a la hipotenusa mide:

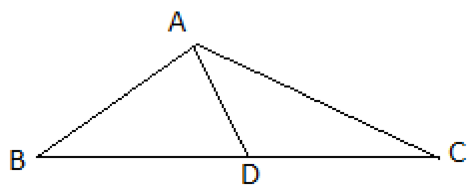
a) $\frac{12}{5}$
b) $\frac{5}{13}$
c) $\frac{12}{13}$
d) $\frac{25}{13}$
e) $\frac{60}{13}$

21.- En la figura $L_1 // L_2 // L_3 // L_4$. Si AB : BC : CD = 2 : 3 : 7 y EM= 36 cm.
Entonces FG mide:?



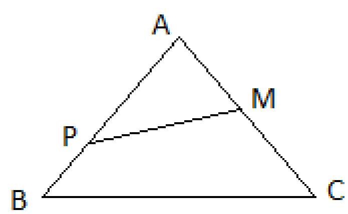
a) 6
b) 9
c) 21
d) 12
e) 18

22.-En el triángulo ABC se tiene que AD es bisectriz del $\angle BAC$. Si BC = 12cm, BA = 2cm, AC = 14cm. El valor del segmento DC es igual a:



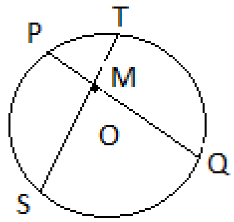
a) 5,5cm. e) N.A.
b) 10,5cm.
c) 12cm.
d) 6cm.

23.- El triángulo ABC es equilátero de lado 4 ; AM=MC = 2 ; AP=3 ; PB = 1. El perímetro del triángulo APM es igual a?



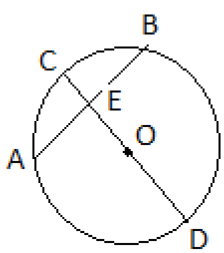
a) $5+\sqrt{7}$
b) $5+\sqrt{10}$
c) $5+\sqrt{19}$
d) $5+\sqrt{13-6\sqrt{3}}$
e) $5+\sqrt{13+6\sqrt{3}}$

24.- En la figura, las cuerdas ST y PQ se cortan en M ; PQ = 12 ; MQ = 8; SM = 2. Calcular la medida del segmento TM.



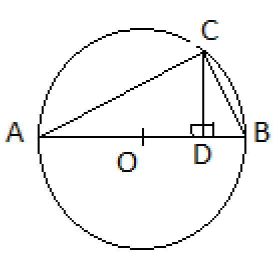
a) 64
b) 32
c) 16
d) 4
e) 1

25.- En la figura CD es diámetro, $\overline{CD} \perp \overline{AB}$; $\overline{AB} = 8$; $\overline{OD} = 5$; $\overline{EC} = ?$



a) 1.5
b) 2
c) 3
d) 8
e) N.A.

26.- SI $\overline{CD} = 8cm.$, $\overline{CB} = 10cm.$, entonces el radio de la circunferencia mide:



a) $\dfrac{32}{3}cm.$

b) $\dfrac{30}{3}cm.$

c) $\frac{25}{3}cm.$

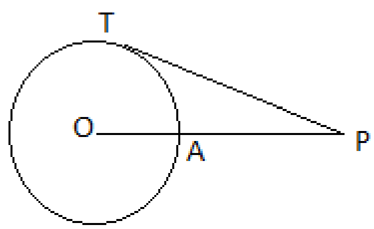
d) $19cm.$

e) No se puede determinar.

27.- Desde un punto P situado a 10cm. del centro de una circunferencia de radio 6cm, se traza una recta tangente a ella.

$\overline{OA} = 6cm.$, $\overline{OP} = 10cm.$

La medida del segmento tangente es:



a) 10 cm.

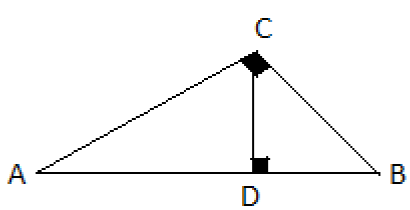
b) 8 cm.

c) 6 cm.

d) 16 cm.

e) 4 cm.

28.- En el ΔABC, rectángulo en C, $\overline{AD} = 15cm$ y $\overline{AB} = 20cm.$, la medida de $\overline{AC}$ es:



a) $10\sqrt{3}cm.$

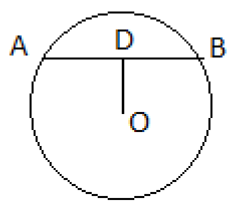
b) 10cm.

c) 35cm.

d) 400cm.
e) Ninguna de las anteriores.

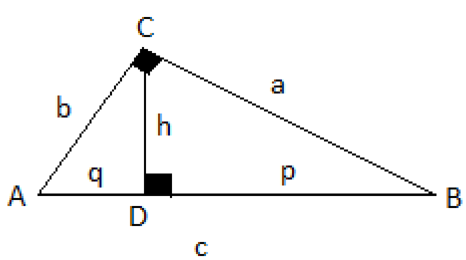
29.- En un triángulo rectángulo, un cateto mide 8cm. y la proyección del otro cateto sobre la hipotenusa mide 12cm. Entonces la medida de la proyección del primer cateto es:
a) 6 cm.
b) 20 cm.
c) 4 cm.
d) 18 cm.
e) 7,5 cm.

30.- En la figura $\overline{AB}$ y $\overline{OD}$ miden 12 y 8 m, respectivamente. El diámetro de la circunferencia mide:



a) 14m.
b) 20m.
c) 10m.
d) 12m.
e) Faltan Datos.

31.- De acuerdo con la figura:



Se afirma que:
I)b:c=h:a II) a:b=h:q III)b:h=h:q
De estas afirmaciones es(son) verdadera(s)
a) Sólo I
b) Sólo II
c) Sólo III
d) I y II
e) Todas

Instituto Nacional

2019

32.- Los lados a, b, c de un ΔABC miden 20, 24 y 32 cm respectivamente. ¿A qué distancia de A está ubicado el pie de la bisectriz del ángulo exterior de γ ?

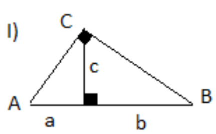
a) 160 cm.
b) 32 cm.
c) 128 cm.
d) 240 cm.
e) 192 cm.

33.- Si las medidas de los catetos de un triángulo rectángulo están en razón 1 : 2 y su hipotenusa es 10m, entonces su área mide:

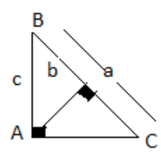
a) $20m^2$
b) $10\sqrt{3}m^2$
c) $4\sqrt{5}m^2$
d) $5\sqrt{5}m^2$
e) $5\sqrt{3}m^2$

34.- ¿En cuál(es) de las siguientes figuras se cumple que $c^2 = a \cdot b$?

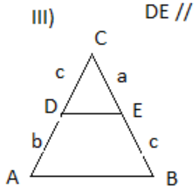
I)



II)



III) DE // AB



a) Sólo I
b) Sólo II
c) Sólo III
d) I y III
e) Todas.