GUÍA DE ESTEREOMETRÍA
Enfoque Vectorial
AGOSTO DE 2019

Alumno .... **Curso** ....

Se conoce por estereometría a la geometría del espacio tridimensional, por efectos didácticos se enseña al final de la geometría básica, la cual es considerada como la geometría plana, lo probable es que sea considerada como básica por ser fácilmente representable en un dibujo, sin embargo, las primeras experiencias de carácter geométrico son con cuerpos, con objetos que ocupan un cierto volumen, es decir, los vemos, los tocamos, los podemos recorrer con nuestros sentidos, aunque no con todos en algunos casos, y así hacernos una imagen de ellos. La representación de estos objetos es un desafío para el niño, inclusive para algunos adultos. La representación más simple que podemos considerar es tal vez la de un cubo, para algunos adultos esto resulta díficil; la representación de una esfera requiere de algunas técnicas de sombreado y proyección. Hay obras de arte en las cuales no hay por donde encontrar el punto de vista con el cual se observa un cuerpo geométrico. Para hacer más presente esto, recuerde como dibujaba las casitas que quería representar en sus primeros años de escuela. Para cuando le quisieron enseñar geometría, le pidieron hacer un tremendo ejercicio mental, por ejemplo imaginar los cerros como triángulos perfectos, la luna como una circunferencia; no se puede pedir lo mismo para que un niño pequeño represente su pelota con que juega o que represente por ejemplo un jarrón de superficies curvas.
En la historia del desarrollo de las ideas matemáticas hay mucha contradicción con las lineas didácticas, una de estas es el desarrollo de la geometría, otra es el desarrollo de integrales y derivadas, lo anoto en ese orden, pues es así como se generaron, primero las integrales y mucho después las derivadas. Otra corresponde al desarrollo de la trigonometría, primero fue la trigonometría esférica y mucho después la trigonometría plana.
Los libros en los cuales el gran Euclides condensó todo el conocimiento matemático a su tiempo, fueron confeccionados, seguramente, para ser un tratado a trabajar por los eruditos de ese tiempo, nunca para ser ocupado con niños o indoctos. En esos libros, llamados *Los Elementos*, se presenta la geometría a partir de conceptos abstractos y con ideas bastante lejanas a una geometría estática. Pese a todo lo imperfecto que pudo ser el trabajo de Euclides, nada antes de él había respecto al método axiomático-deductivo.

Haremos un tratamiento vectorial, es decir, según una estructura algebraica.

Espacio Vectorial

Sean $(V,\, +)$ un grupo abeliano y $(K,\, +,\, \cdot)$ un cuerpo, entonces V es un K espacio vectorial si se verifica lo siguiente:

$\cdot : K \times V \Longrightarrow V$ Operación binaria externa; Tal que

- $(k,\, v) \longmapsto kv$ Ponderación
- $(k_1 + k_2,\, v) \longmapsto k_1 v + k_2 v$ distribución
- $(k_1 \cdot k_2,\, v) \longmapsto k_1(k_2 v)$ ponderación de una ponderación

Podemos deducir que $1 \cdot v = v$ y que si $kv = 0_V$, entonces $k = 0$ ó $v = 0_V$

Para efectos de este libro, vamos a trabajar con $V = \mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ y $K = \mathbb{R}$, es decir, un espacio vectorial especial que se corresponde con nuestro espacio tridimensional, en lenguaje corriente *largo, ancho y alto* cada una de las tres dimensiones y $\mathbb{R}$ como escalar, para usar el lenguaje de la física también.

$v \in \mathbb{R}^3 \Longrightarrow v = (x,\, y,\, z) = (x_1,\, x_2,\, x_3)$ tiene mayor generalidad usar $(x_1,\, x_2,\, x_3)$ por sobre $(x,\, y,\, z)$

Algunas consideraciones:
Dos vectores de $\mathbb{R}^3$,
$v_1 = (x_1,\, x_2,\, x_3)$ y $v_2 = (y_1,\, y_2,\, y_3)$ son iguales si y sólo si $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2$, $x_3 = y_3$,

$\lambda v_1 = \lambda(x_1,\, x_2,\, x_3) = (\lambda x_1,\, \lambda x_2,\, \lambda x_3)$

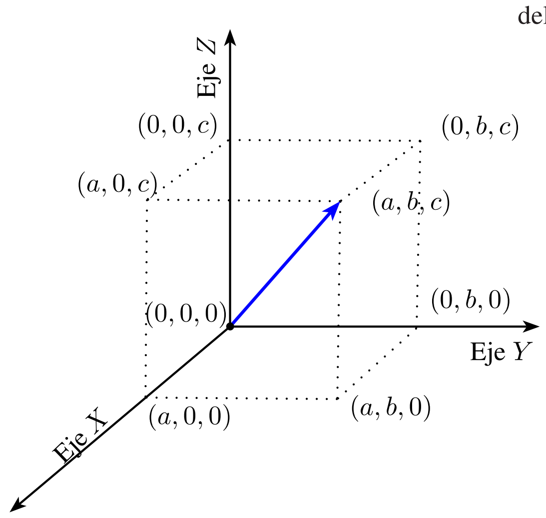
$v_1 + v_2 = (x_1,\, x_2,\, x_3) + (y_1,\, y_2,\, y_3) = (x_1 + y_1,\, x_2 + y_2,\, x_3 + y_3)$

En $I\!\!R^3$ hay dos modos generales de definir una suerte de multiplicación, uno se llama producto interno o producto punto y el otro producto externo o producto cruz.

$v_1 \cdot v_2 = (x_1,\, x_2,\, x_3) \cdot (y_1,\, y_2,\, y_3) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_2y_2$; este producto considera dos vectores y genera un escalar

$v_1 \times v_2 = (x_1,\, x_2,\, x_3) \times (y_1,\, y_2,\, y_3) = (x_2y_3 - x_3y_2,\, x_3y_1 - x_1y_3,\, x_1y_2 - x_2y_1)$; este producto genera un nuevo vector tal que al llamarlo v_3, veremos que $v_1 \cdot v_3 = v_2 \cdot v_3 = 0$

Graficamente el vector $v = (a,\, b,\, c)$ es:



La flecha azul y corresponde a la diagonal del exaedro cuyos vertices son:

$(0,\, 0,\, 0)$,

$(a,\, 0,\, 0)$,

$(a,\, b,\, 0)$,

$(0,\, b,\, 0)$,

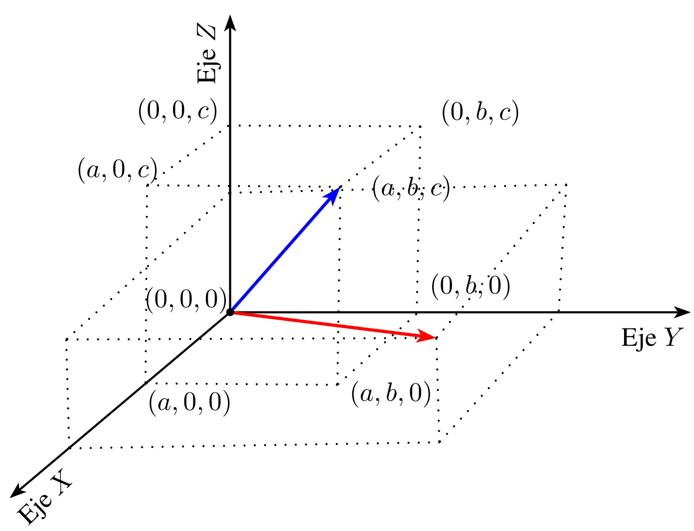
$(0,\, b,\, c)$,

$(0,\, 0,\, c)$,

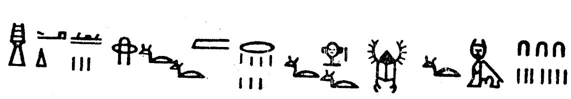
$(a,\, 0,\, c)$ y

$(a,\, b,\, c)$

En la figura siguiente se agregó un vector w de coordenadas $(d,\, e,\, f)$. Registre en la misma gráfica las coordenadas de los ocho vértices del exaedro del cual w es la diagonal (La flecha roja).

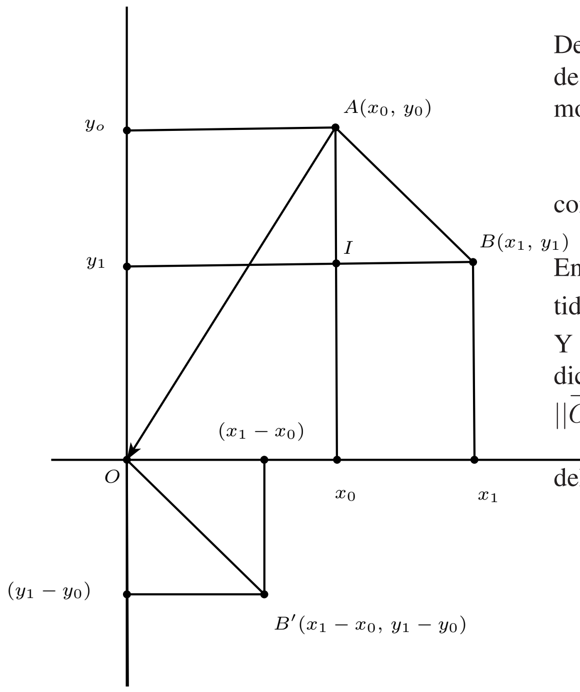


Ubique graficamente el vector $v + w$, previo obtener la suma algebraica. (use regla y compás)



 l.arancibia.mat@institutonacional.cl

Cuando se tienen dos puntos, es plausible preguntarse por la distancia que los separa, y para este fin, acudimos al teorema de Pitágoras.
Pero previamente vamos a considerar que todo segmento puede ser llevado al origen de coordenadas por medio de una traslación. Vamos a ejemplificar a idea en el plano, es decir, en dos dimensiones:



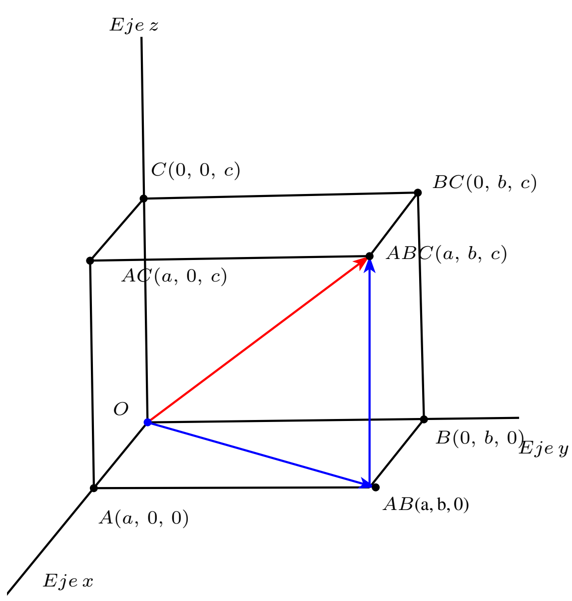
En la figura se representan los puntos $A(x_0,\, y_0)$ y $B(x_1,\, y_1)$ y tambien el segmento $\overline{AB}$

De este segmento es trasladado el punto A al origen de coordenadas y el punto B es trasladado según el mismo *vector* al punto B'

Este punto B' tiene por coordenadas a $(x_1 - x_0)$ como abscisa y a $(y_1 - y_0)$ por ordenada.

En el sentido físico, $\overrightarrow{AB}$ tiene la misma magnitud, sentido y dirección que $\overrightarrow{OB'}$
Y es la magnitud de $\overrightarrow{OB'}$ la distancia entre A y B y se dice que
$||\overrightarrow{OB'}|| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$
La medida del vector recibe el nombre de Norma del vector, la norma de un vector es siempre positiva.

Para obtener la norma de un vector en $I\!R^3$, basta considerar dos de las diagonales del paralelepípedo uno de cuyos vértices es el origen de coordenadas
Si los vértices son $O(0,\, 0,\, 0)$, $A(a,\, 0,\, 0)$, $AB(a,\, b,\, 0)$, $B(0,\, b,\, 0)$, $BC(0,\, b,\, c)$, $C(0,\, 0,\, c)$, $AC(a,\, 0,\, c)$ y por último $ABC(a,\, b,\, c)$ los nombres dados a los puntos que corresponden a los vértices están dados de modo que nos muestren lo que va ocurriendo



Según la gráfica, $||\overrightarrow{O(AB)}|| = \sqrt{a^2 + b^2}$, ser esta la medida de la diagonal del rectángulo $A(AB)BO$
La medida de $(AB)(ABC)$ es c. De aquí entonces la medida de $O(ABC)$ estará dada por:
$||O(ABC)|| = \sqrt{\sqrt{(a^2 + b^2)}^2 + c^2} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$
Lo que se espera ocurra.

La linea recta, según Euclides se trata del lugar geométrico de un punto que se desplaza por el plano y sobre el cual no se ejerce fuerza alguna.
Vectorialmente esta idea se muestra del siguiente modo: Si $(x,\, y)$ es el punto encuestión, entonces satisface que $(x,\, y) = \lambda(a,\, b)$, donde $(a,\, b)$ es el vector que le entrega la dirección a la recta. En resumidas cuentas, solo consideramos una ponderación del vector $(a,\, b)$, con lo cual no cambia la dirección, aunque si lo hacen el sentido y la magnitud.
Si consideramos los conceptos anteriores como pendiente, deberíamos tener la proporción:

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = \lambda$$

Esto es válido, ya que los valores x, y y z conforman segmentos homólogos con a, b y c del vector director dado y con ello se dan las condiciones del teorema de Thales.

La ecuación vectorial de la recta en $I\!R^3$ que pasa por el origen está dada por:

$$(x,\, y,\, z) = \lambda(a,\, b,\, c)$$

Si la recta pasa por otro punto distinto al origen de coordenadas, por ejemplo $(h,\, k,\, l)$, la ecuación en cuestión se transforma a:

$$(x,\, y,\, z) = (h,\, k,\, l) + \lambda(a,\, b,\, c)$$

Esta ecuación la podemos seguir desarrollando y tener:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & h + a\lambda \\ y & = & k + b\lambda \\ z & = & l + c\lambda \end{array}\right. \quad \begin{array}{l}\text{Ecuaciones paramétricas} \\ \text{de la recta}\end{array}$$

O para ser consecuentes con Thales y Euclides en:

$$\frac{x-h}{a} = \frac{y-k}{b} = \frac{z-l}{c} = \lambda$$

donde observamos una igualdad de razones.

Dos rectas serán paralelas cuando sus vectores directores sean iguales o bien uno de ellos ponderado del otro. $\mathcal{L}_1 : (x,\, y,\, z) = (x_1,\, y_1,\, z_1) + \lambda(a_1,\, b_1,\, c_1)$ y $\mathcal{L}_2 : (x,\, y,\, z) = (x_2,\, y_2,\, z_2) + \lambda(a_2,\, b_2,\, c_2)$ cuyos vectores directores son respectivamente $v_1 = (a_1,\, b_1,\, c_1)$ y $v_2 = (a_2,\, b_2,\, c_2)$ con $\mathcal{L}_1 \parallel \mathcal{L}_2$, entonces $v_2 = v_1$ o bien $v_2 = k \cdot v_2$

Las rectas serán perpendiculares, si se tiene que $\langle v_1,\, v_2\rangle = 0$, donde $\langle v_1,\, v_2\rangle = a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2 + c_1 \cdot c_2$ a este último se le llama producto interno y tiene algunas propiedades que talvez no consideremos por el momento.

Veamos un ejemplo con lo presentado hasta el momento.

Determinar la ecuación de la recta que pasa por los puntos $P(2,\, -3,\, 5)$ y $Q(6,\, 7,\, -4)$

El vector director de la recta esta dado por $Q - P$, no hay distinción entre punto y vector, salvo por la interpretación o connotación que queramos darle.
$v = \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{Q-P} = (6-2,\, 7 -^{-} 3,\, -4-5) = (4,\, 10,\, -9)$

La recta pedida satisface $(x,\, y,\, z) = (2,\, -3,\, 5) + \lambda(4,\, 10,\, -9)$ y en todas sus versiones, la ecuación es:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & 2 + 4\lambda \\ y & = & -3 + 10\lambda \\ z & = & 5 - 9\lambda \end{array}\right.$$

O

$$\frac{x-2}{4} = \frac{y+3}{10} = \frac{z-5}{-9}$$

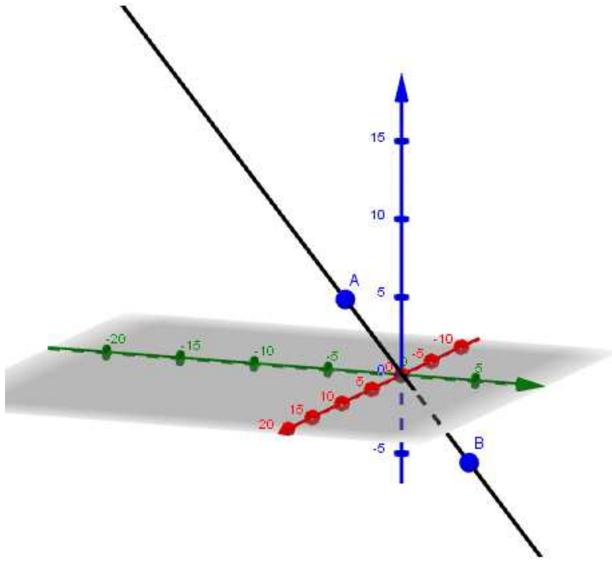
Si además se pidiese una recta perpendicular a la recta por P y Q (los puntos anteriores) por P, debemos indicar que hay infinitas de estas rectas y ellas tienen vector director w que cumple con

$$\langle(4,\, 10,\, -9),\, w\rangle = \langle(4,\, 10,\, -9),\, (x,\, y,\, z)\rangle = 4x + 10y - 9z = 0$$

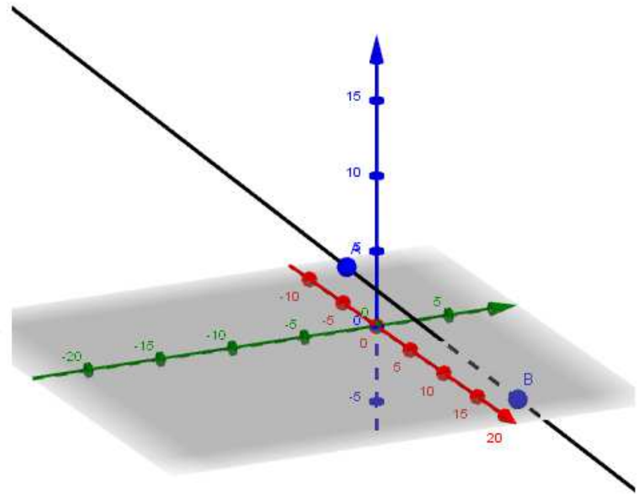
Todos los puntos que satisfacen esta condición pertenecen a un mismo plano.
Por el momento, este plano pasa por el origen de coordenadas, no sabemos donde se contacta con la recta (el punto de contacto se llama punto de penetración). Para obtener las coordenadas del punto, expresamos las coordenadas según la ecuación paramétrica de la recta y la reemplazamos en la ecuación del plano:

$4(2+4\lambda) + 10(-3+10\lambda) - 9(5-9\lambda) = 8 + 16\lambda - 30 + 100\lambda - 45 + 81\lambda = -67 + 197\lambda = 0$, eso indica que $\lambda = \dfrac{67}{197}$

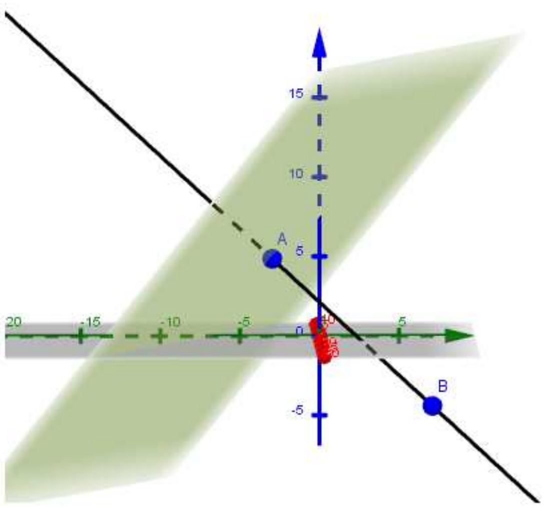
La representación gráfica



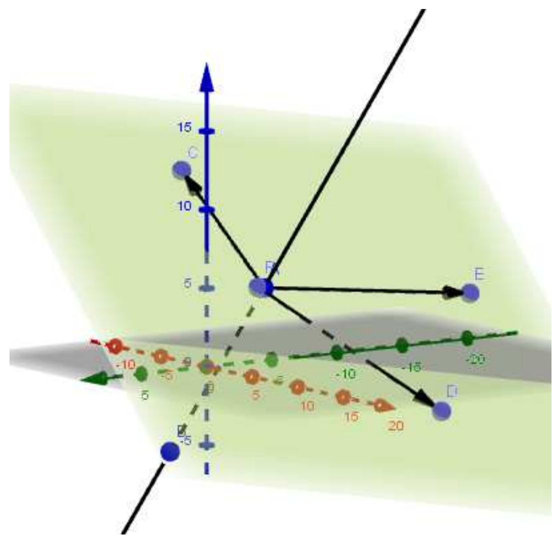
Los dos puntos, A y B y la recta por ellos.



Es otra vista de la misma situación anterior



El plano perpendicular a la recta por los puntos A y B.



Otra vista de la misma situación anterior, mostrando con tres puntos de ese plano que los vectores equipolentes desde A a ellos son todos perpendiculres a la recta por A y B

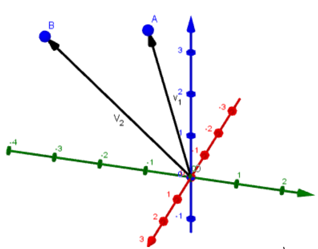
La ilustración siguiente muestra la secuencia para obtener la ecuación de un plano por tres puntos dados

Por ejemplo $A(x_0,\, y_0,\, z_0)$, $B(x_1,\, y_1,\, z_1)$ y $C(x_2,\, y_2,\, z_2)$ los tres puntos.
Escogemos a A como origen para dos vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$, recuerde que estos vectores tienen ahora su origen en $O(0,\, 0,\, 0)$.
Los planos perpendiculares a estos vectores por O satisfacen que

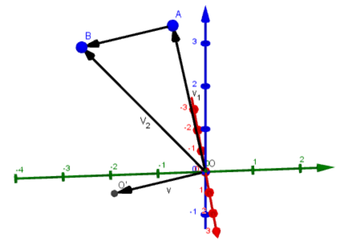
$\langle (x,\, y,\, z), (x_1 - x_0,\, y_1 - y_0,\, z_1 - z_0) \rangle = x(x_1 - x_0) + y(y_1 - y_0) + z(z_1 - z_0) = 0$ y
$\langle (x,\, y,\, z), (x_2 - x_0,\, y_2 - y_0,\, z_2 - z_0) \rangle = x(x_2 - x_0) + y(y_2 - y_0) + z(z_2 - z_0) = 0$

Como ambos planos pasan por el origen, su intersección es una recta que pasa por el origen, de esa recta nos interesa su vector director y el plano cuyos vectores por O son perpendiculares a la recta intersección es paralelo al plano por los tres puntos.
Bastará entonces trasladar dicho plano. Esto se logra considerando los vectores $(x - x_0,\, y - y_0,\, z - z_0)$ que sean perpendiculares a la recta intersección.

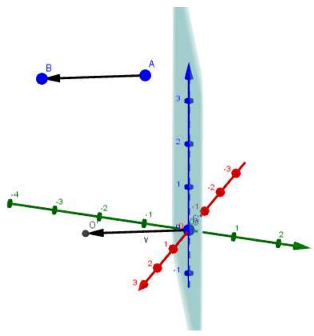
En la secuencia de figuras se tiene representada en parte la secuencia anterior



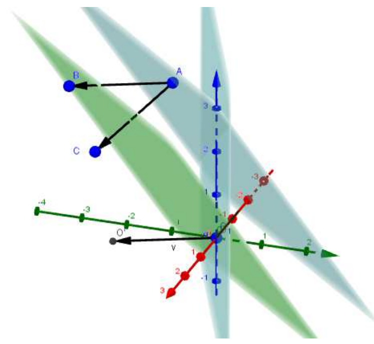
Dos puntos A y B o dos vectores $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$



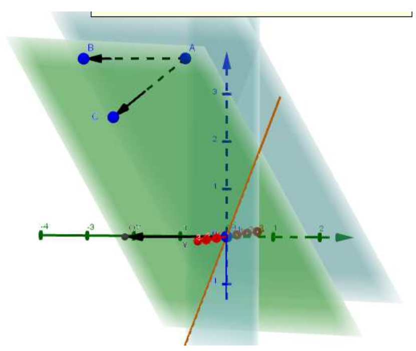
Es otra vista de la misma situación anterior



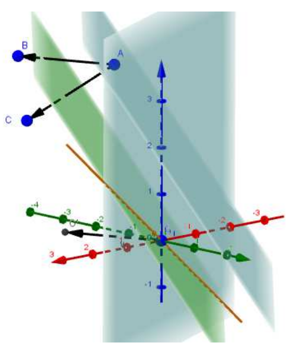
Se muestra la flecha o vector equipolente AB
y el vector $\overrightarrow{AB}$, el cual nace en el origen de coordenadas.
Además del plano que contiene a todas las rectas perpendiculares al vector $\overrightarrow{AB}$



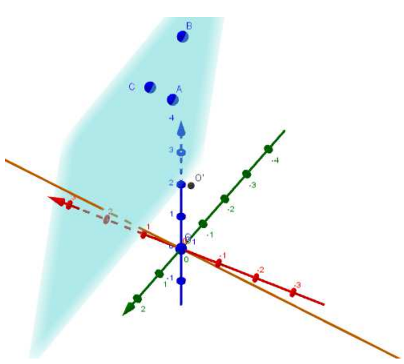
Ahora estan representados los planos que contienen a las rectas perpendiculares a dos vectores, a saber $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$

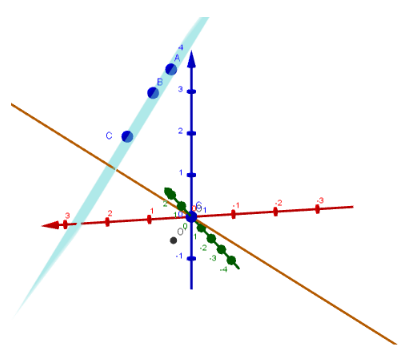


La recta en color naranja muestra la intersección de estos dos planos,



Esta es otra vista de la situación anterior, esta recta es la que contiene al vector director del plano por los puntos A, B y C





Para finalizar, se muestran dos vistas diferentes del plano por los tres punto y la recta que contiene al vector director del plano.

Todo lo que hemos visto hasta ahora se ve fundamentado por siguientes postulados:

Postulado 1 *Por dos puntos del espacio pasa una y solamente una recta.*

Postulado 2 *Dada una recta en el espacio, existen puntos que pertenecen a la recta y puntos que no pertenencen a la recta.*

Postulado 3 *Por tres puntos del espacio, no pertenecientes a una misma recta, pasa un y solo un plano por ellos.*

Postulado 4 *Dado un plano en el espacio, existen puntos que pertenecen al plano y puntos que no pertenecen al plano.*

A partir de estos postulados, podemos formular teoremas que nos van a permitir validar lo que ya hemos en parte desarrollado.

Teorema Si una recta tiene dos de sus puntos en un plano, entonces toda la recta está contenida en dicho plano.

Podemos considerar un tercer punto y esos tres puntos van a pertenecer a un mismo plano y por los postulados de la geometría plana podemos asegurar que todo punto de la recta está en un mismo plano.

Teorema Por una recta **r** y por un punto A exterior a esta recta pasa un único plano.
Si tenemos una recta, tenemos dos puntos, luego los tres puntos son no colineales y hay un único plano que pasa por ellos.

Teorema Por dos rectas concurrentes pasa un único plano.

Se toma el punto de concurrencia y otros dos puntos, uno de cada recta y allí estan los tres puntos no colineales.

Postulado 5 Si dos puntos poseen un punto en común, entonces ellos poseen a lo menos otro punto distinto en común

Teorema Todo plano divide al espacio en dos semi-espacios que tienen las siguientes propiedades: Si dos puntos A y B pertenecen a un mismo semi-espacio, entonces el segmento $\overline{AB}$ está contenido en ese mismo semi-espacio y no corta al plano. Si los puntos pertenecen a distintos semi-espacios, entonces el segmento $\overline{AB}$ corta al plano en un único punto.
Para demostrar este teorema, se debe considerar los axiomas y teoremas de la geometría plana referente a rectas, planos y semi-planos y los conceptos de concavo y convexo.
Se deja propuesta la demostración.

En la geometría plana, la figura básica es el triángulo y para la geometría del espacio es la pirámide, donde una pirámide se construye considerando puntos en un plano y un punto fuera del plano.

Ejercicios

1. Dados los tres puntos $(1,\ -1,\ -4),\ \ (3,\ 0,\ -5),\ \ (-3,\ -3,\ -2)$
   Demuestre que son colineales, sin representarlos.

2. Demuestre que por los puntos $(0,\ 0,\ 4),\ \ (8,\ 4,\ 16),\ \ (20,\ 10,\ 34)$
   pasan infinitos planos. Puede apoyarse en una representación gráfica.

3. Determine la ecuación del plano que pasa por los puntos
   $(1,\ -5,\ 1),\ \ (-1,\ 3,\ 1),\ \ (2,\ -3,\ 4).$

4. Determine la ecuación del plano perpendicular a la recta que pasa por los puntos $P_1(4,\ 7,\ -2),\ \ P_2(1,\ 3,\ 2)$ y que pasa por el punto $Q(2,\ 5,\ 7)$

5. Determine la ecuación del plano que pasa por los puntos
$P_1(1,\ 4,\ 3)$ y $P_2(-2,\ 1,\ 0)$ y que es además perpendicular al plano
$x + y - z - 1 = 0$

6. Sin representar graficamente, haga ver que las rectas
$L_1 :\ \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-2}{-1} = \dfrac{z}{1}$ y
$L_2 :\ \dfrac{x+6}{7} = \dfrac{y}{4} = \dfrac{z-1}{-3}$ son perpendiculares

7. Sea ρ un plano. $A,\ B,\ C$ y D puntos de ese plano y M un punto fuera del plano, entonces:
   A) Si C divide al segmento $\overline{AB}$ en partes iguales a $\overline{MA} = \overline{MB}$, entonces $\overline{MC} \perp \rho$

   B) Si $\triangle ABC$ es equilátero y D equidista de $A,\ B$ y C, entonces $\overline{MD} \perp \rho$

   C) Si $\triangle ABC$ es equilátero y D equidista de $A,\ B$ y C, entonces $\overline{MA} = \overline{MB} = \overline{MC}$ implica que$\overline{MD} \perp \rho$

   D) Si $\triangle ABC$ es equilátero y $\overline{MD} \perp \rho$, entonces D es equidistante de $A,\ B$ y C

   E) Nada anterior es verdadero.

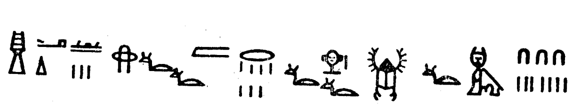
8. Considere las siguientes afirmaciones:

   I) Si una recta es paralela a dos planos, entonces esos planos son paralelos.
   II) Si dos planos son paralelos, entonces toda recta de uno es paralela a cualquiera del otro.
   III) si dos rectas son secantes, entonces hay una única perpendicular común a ambas.

   Entonces:
   A) son todas verdaderas
   B) solamente II es verdadera
   C) solamente III es verdadera
   D) solamente I es verdadera
   E) solamente II y III son verdaderas

9. r y s son dos rectas que se cruzan sin cortarse (alabeadas), entonces podemos garantizar que:
   A) todo plano que contiene a r, contiene a s
   B) existe un plano que contiene a r y es perpendicular a s
   C) existe un único plano que contiene a r y a s
   D) existe un plano que contiene a r y es paralelo a s
   E) toda recta secante con r es secante con s

10. ¿Cuántas diagonales posee un prisma pentagonal?
   A) 5
   B) 10
   C) 15
   D) 18
   E) 24



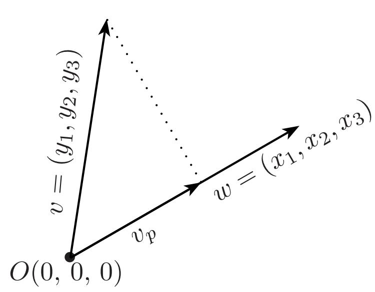
Otro tipo de problemas

Antes de proceder vamos a definir **Norma de un vector** como la medida o distancia desde el origen al punto donde llega el vector en cuestión.
$v = (x_1,\, x_2,\, x_3)$, entonces $||v|| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$. Obsérvese que la norma se corresponde con la medida o distancia entre dos puntos, aquí tenemos que si el origen es $(0,\, 0,\, 0)$, la distancia entre los puntos es $\delta = \sqrt{(x_1 - 0)^2 + (x_2 - 0)^2 + (x_3 - 0)^2}$
Son propiedades de la norma las siguientes:

$$\begin{array}{rl} \text{i)} & ||v|| \geq 0 \wedge ||v|| = 0 \Longleftrightarrow v = 0 \\ \text{ii)} & ||\lambda v|| = |\lambda| \cdot ||v|| \\ \text{iii)} & ||v|| + ||w|| \leq ||v|| + ||w|| \end{array}$$

La idea es que estas propiedades sean demostradas, para así poder usarlas con toda propiedad en las situaciones que se presenten a futuro.
Llamaremos **vector unitario** al vector cuya norma sea 1, en vector v se puede expresar como $v = ||v|| \cdot \dfrac{v}{||v||}$, donde se tiene que $\dfrac{v}{||v||}$ es el vector unitario.

Podemos considerar un problema que involucra algunos temas que fueron tratados con anterioridad pero con regla y compás, por ejemplo la proyección ortogonal de un vector v dado sobre otro vector w también dado.
Por lo que ya hemos considerado $\langle v,\, w\rangle = x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + x_3 \cdot y_3$ es el producto interno usual de la geometría euclidiana. y además se tiene que si $\langle v,\, w\rangle = 0$, entonces v y w son ortogonales.

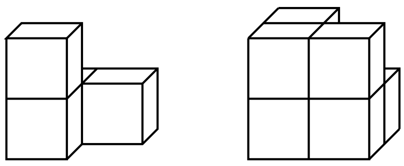


$w = (x_1,\, x_2,\, x_3)$,
$v = (y_1,\, y_2,\, y_3)$ y
v_p es el vector proyección de v sobre w
Es claro que v_p debe ser un ponderado del vector unitario $\dfrac{w}{||w||}$ Considerando la definición alternativas $\langle v,\, w\rangle = ||v|| \cdot ||w|| \cos(\angle v,\, w)$
De aquí $\cos(\angle v,\, w) = \dfrac{\langle v,\, w\rangle}{||v|| \cdot ||w||}$
y esto corresponde a la norma de v_p
Teniendo a fin de cuentas que
$v_p = \dfrac{\langle v,\, w\rangle}{||v|| \cdot ||w||} \cdot \dfrac{w}{||w||}$

Percepción del espacio

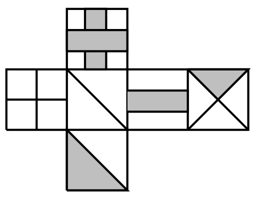
Desarrolle completamente sus respuestas

1. Para cada uno de los cuerpos, determine el número de caras.

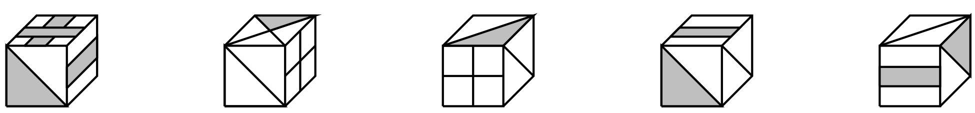


4 cubos 7 cubos

2. Considere la siguiente figura, dibujada en una lámina transparente, la cual es el despliegue de un cubo.

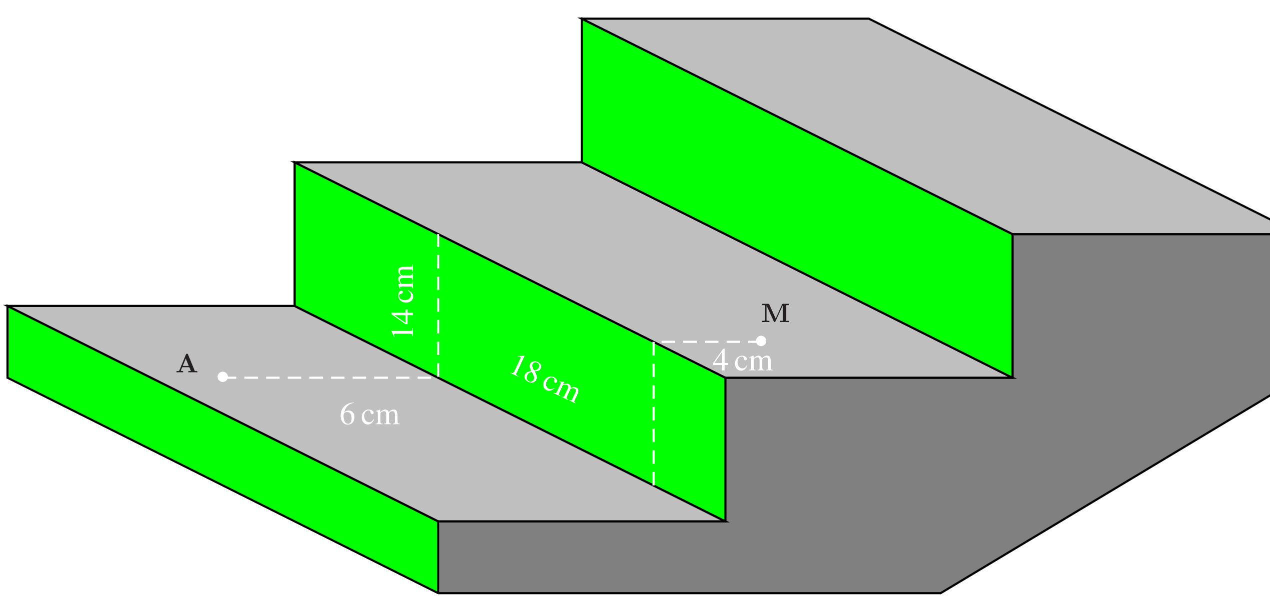


Entre los cinco cubos siguientes, ¿cuál corresponde al plegado de la figura?
Justifique su respuesta

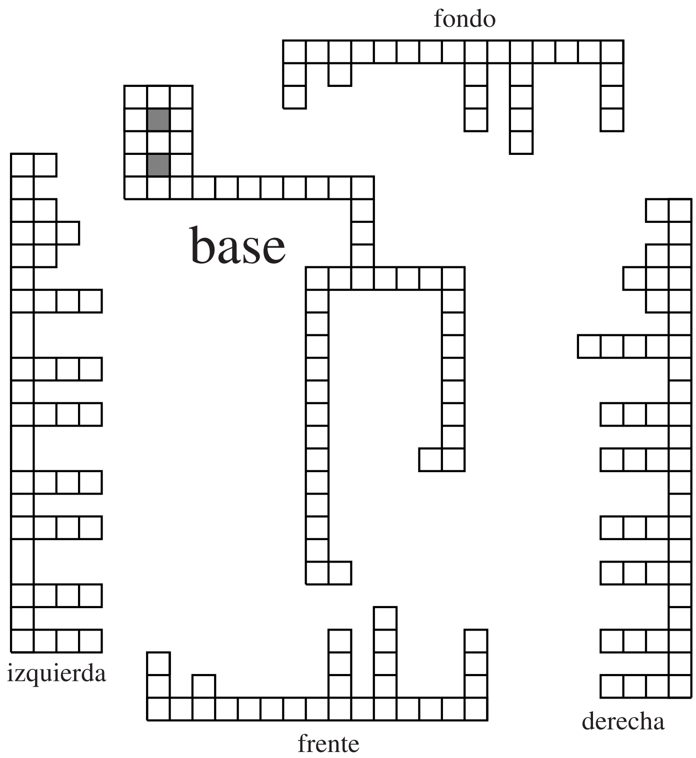


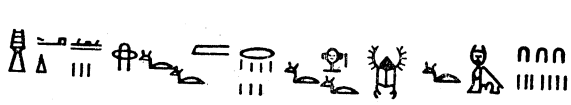
A) B) C) D) E)

3. Calcule la distancia mínima entre la araña A y la mosca M, las que están ubicadas como muestra la figura



4. Las figuras que se tienen, corresponden a vistas de una ruina, la cual fue construída exclusivamente con cubos congruentes. Represente esa ruina en tres dimensiones. Determine el número total de cubos que la forman.





l.arancibia.mat@institutonacional.cl