INSTITUTO NACIONAL JOSÉ MIGUEL CARRERA DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
OCTAVO BÁSICO, Primer Semestre 2019
Coordinadora: Nola Labé Herrera

GUIA 4 UNIDAD: PROBABILIDAD

Un poquito de Historia

Luca Pacioli (1445-1547), ***Girolamo Cardano*** (1501-1576), ***Niccolo Fontana*** **–**Tartaglia- (1499-1557) y ***Galileo Galilei*** (1564-1642) son considerados los precursores del estudio de las probabilidades a partir de problemas relacionados con juegos de azar.

Los problemas de juegos de apuestas inconclusos, planteados por el caballero de Meré a ***Blaise Pascal*** (1623-1662); quien los comparte y discute por medio de cartas con ***Pierre de Fermat*** (1601-1665) dan origen a la moderna teoría de la probabilidad.

Posteriormente realizan su respectivo aporte, entre otros: ***Jacob Bernoulli*** (1654-1705), ***Abraham De Moivre*** (1667-1754), ***Thomas Bayes*** (1702-1761),***Pierre-Simón Laplace*** (17491827) y ***Andrei Kolmogorov*** (1903- 1987).

Definiciones Elementales

Experimento Aleatorio: Es aquel en que bajo las mismas condiciones iniciales puede presentar resultados diferentes, por lo tanto, no podemos predecir el resultado exacto. Por ejemplo al lanzar un dado, no podemos anticipar el número que saldrá. Lo contrario es un **experimento Determinista.**

Espacio Muestral (Ω): Es el conjunto Universo formado por todos resultados posibles de un experimento aleatorio.
ejemplo: Al lanzar una moneda el espacio muestral es **Ω= {Cara, Sello}**

Suceso o Evento: Es cualquier subconjunto del espacio muestral. Por ejemplo al lanzar un dado, el espacio muestral es **Ω = {1,2,3,4,5,6}**

Son sucesos:

Eventos posibles: Son todos aquellos sucesos probables del espacio muestral.

Ejemplos:
A={salga par}={2,4,6}
B={Salga un múltiplo de 3}={3,6}
C={Salga un divisor de 12}={1,2,3,4,6}

Eventos ciertos o seguros: Aquél que está formado por todo el espacio muestral.

Ejemplo: D={Salga un divisor de 60}={1,2,3,4,5,6}= Ω

Eventos imposibles: Son aquellos que no pueden suceder.
Ejemplo: E={Salga un múltiplo de 10}={}

Sucesos Mutuamente excluyentes: Los sucesos A y B son mutuamente excluyentes si la ocurrencia simultánea de ambos es imposible, es decir $A \cap B = \emptyset$.
Ejemplo: al lanzar un dado, los sucesos A={Sale número par}, B={Sale número impar}, son mutuamente excluyentes.

Sucesos Independientes: Dos sucesos se dicen independientes, si la ocurrencia de uno de ellos no influye en la ocurrencia del otro.
Ejemplo: si sacamos al azar una carta de un naipe, la observamos, luego la retornamos a la baraja, revolvemos y sacamos una segunda carta, ambas extracciones son independientes.

ACTIVIDAD 1:

1.-Describe las siguientes situaciones utilizando la palabra “seguro,” “probable” e “imposible” justifica tu respuesta.

A) Sale un 3 al lanzar un dado:____
B) Se lanza dos dados y la suma de los valores obtenidos es 15:____
C) Se lanza una moneda y sale cara: ____
D) Se saca una bolita negra de una bolsa que tiene 50 bolitas blancas y una negra:____
E) Se lanza una moneda y un dado y salen dos caras:____
F) Se extrae una carta de naipe inglés y sale una carta de trébol roja:____

2.-Nombra 2 ejemplos de suceso seguro.
____
____

3.-Nombra 2 ejemplos de suceso posible.
____
____

4.-Nombra 2 ejemplos de suceso imposible.
____
____

REGLA DE LAPLACE

Si A es un suceso, contenido en el espacio muestral Ω ambos con cardinalidad finita y todos los sucesos elementales equiprobables, entonces la probabilidad de que ocurra el suceso A esta dada por:

$$P(A) = \frac{N^{o} de casos\ favorables}{N^{o} de casos\ posibles} = \frac{\#(A)}{\#(\Omega)}$$

Por ejemplo: Al lanzar un dado, la probabilidad de que salga un divisor de 18 es:

$$P(divisor\ de 18) = \frac{4}{6} = 0,\overline{6} \approx 66,\overline{6}\%$$

Debido a que los casos posibles son {1,2,3,4,5,6} y los favorables son {1,2,3,6}

Si A representa un evento o suceso, se cumple que:

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

o

$$0\% \leq P(A) \leq 100\%$$

Suceso imposible: Si se tiene certeza absoluta de que un evento A **NO** ocurrirá, su probabilidad es:

$$P(A) = 0$$

Ejemplo:

La probabilidad de obtener un número mayor que 6 al lanzar un dado común es 0 (0 de 6).

Casos posibles: 6 (1,2,3,4,5,6)
Casos favorables: 0

$$P(\text{mayor que } 6) = \frac{0}{6} = 0$$

Suceso seguro: Si se tiene certeza absoluta de que un evento A ocurrirá, su probabilidad es:

$$P(A) = 1$$

Ejemplo:

La probabilidad de obtener un número natural al lanzar un dado común es 1 (6 de 6).

Casos posibles: 6 (1, 2, 3, 4, 5, 6)
Casos favorables: 6 (1, 2, 3, 4, 5, 6)

$$P(\text{natural}) = \frac{6}{6} = 1$$

Suceso complemento $(\bar{A})$: La probabilidad de que un suceso NO ocurra, o probabilidad de un suceso complemento, se obtiene a través de:

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

Ejemplo:

Si la probabilidad de que llueva es $\frac{2}{5}$, ¿cuál es la probabilidad de que **NO** llueva?

Solución:

$$P(\text{no llueva}) = 1 - P(\text{llueva})$$

$$P(\text{no llueva}) = 1 - \frac{2}{5}$$

$$P(\text{no llueva}) = \frac{3}{5}$$

LEY DE LOS GRANDES NÚMEROS

Cuando todos los resultados de un experimento son equiprobables (tienen la misma probabilidad de ocurrir), se pueden establecer algunas conclusiones relacionando la probabilidad con la frecuencia relativa de cada evento.

Por ejemplo, Mariela lanzó un dado 100 veces y registró los resultados en la siguiente tabla:

Nº	Cantidad de veces que salió	Frecuencia relativa
1	15	0,15
2	17	0,17
3	20	0, 20
4	19	0,19
5	13	0,13
6	16	0,16
	100	

Luego, volvió a lanzar pero 1.000 veces el mismo dado y agregó los datos en una nueva tabla:

Nº	Cantidad de veces que salió	Frecuencia relativa
1	158	0,158
2	161	0,161
3	168	0, 168
4	165	0,165
5	176	0,176
6	172	0,172
	1.000	

¿Es posible establecer alguna relación entre las tablas y la probabilidad de que salga un 2?

La probabilidad de que salga un 2 al lanzar un dado es:

$P(2) = \frac{1}{6}$, que es equivalente a decir $P(2) = 0{,}16666\ldots$

En la primera tabla la frecuencia absoluta del número 2, es 0,17
En la segunda tabla la frecuencia absoluta del número 2, es 0,161

Nº	Cantidad de veces que salió	Frecuencia absoluta
2	17	0,17
	100	

Nº	Cantidad de veces que salió	Frecuencia absoluta
2	161	0,161
	1.000	

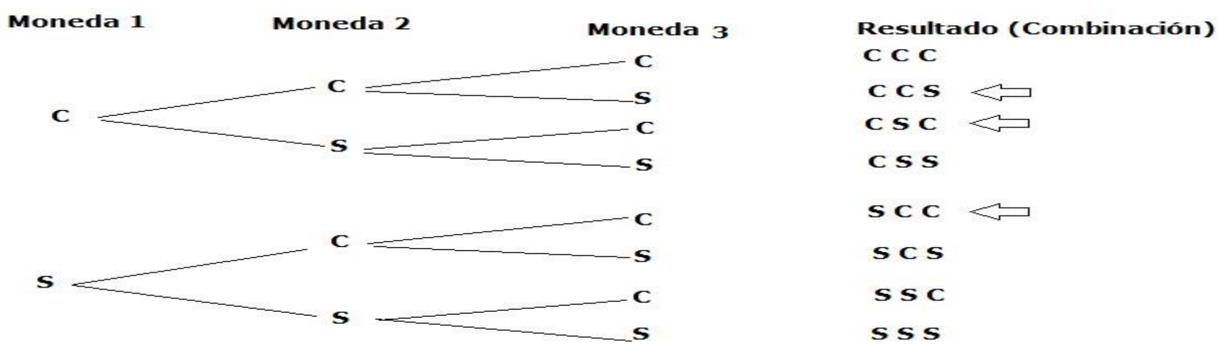
Si comparamos los resultados obtenidos con la probabilidad que salga el número 2, se puede concluir que a mayor cantidad de repeticiones del experimento, este siempre tenderá a la probabilidad calculada a priori.

DIAGRAMA DE ÁRBOL

Son esquemas que nos pueden resultar muy útiles para realizar el conteo de eventos compuestos, las ramas nos muestran las distintas posibilidades.

Ejemplo 1: Si lanzamos 3 monedas (o una moneda 3 veces) ¿Cuál es la probabilidad de que salgan sólo dos caras (en cualquier orden) ?

Podemos representar la situación así:



Entonces tenemos 8 combinaciones (casos posibles) y 3 casos favorables luego la probabilidad solicitada será: $P = \frac{3}{8}$

Ejemplo 2: Un restorán ofrece un menú que consiste en un jugo, un plato de fondo y un postre. El jugo puede ser de naranja, de frutilla o de piña. El plato de fondo pueden ser pollo con papas o cerdo con arroz, y el postre pude ser helado, panqueques o fruta. ¿Cuál es la probabilidad de que una persona elija el cerdo y panqueques?

Para hacer el conteo, realicemos el diagrama de árbol:

Helado
Pollo Panqueques
Fruta
Naranja

Helado
Cerdo Panqueques
Fruta

Helado
Pollo Panqueques
Fruta
Menú Piña

Helado
Cerdo Panqueques
Fruta

Helado
Pollo Panqueques
Fruta
Frutilla

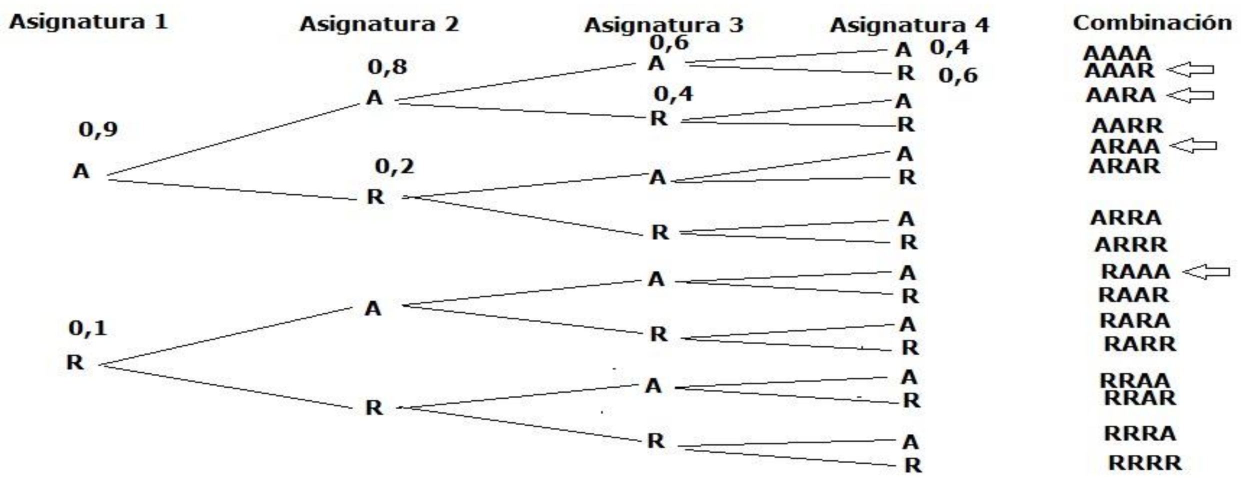
Cerdo HeladoPanqueques
Fruta

La probabilidad pedida será $\frac{3}{18} = \frac{1}{6}.$

El diagrama de árbol permite visualizar las combinaciones posibles.

Ejemplo 3: En el primer semestre de su carrera, Daniel tiene 4 asignaturas A1, A2, A3 y A4, Estadísticamente la probabilidad de aprobar A1 es de 90%, A2 es de 80%, A3 es de 60% y A4 es de 40%. ¿Cuál es la probabilidad de que Daniel apruebe sólo 3 de las 4 asignaturas?

Si A=aprueba, R=reprueba, el diagrama es:



En este caso no podemos aplicar Laplace, debido a que los 4 sucesos no son equiprobables, entonces calculamos la probabilidad así: (Aprovechando que las combinaciones son mutuamente excluyentes y que los sucesos son independientes entre sí)

P= P(AAAR) + P(AARA) + P(ARAA) + P(RAAA)= 0,9• 0,8•0,6•0,6 + 0,9•0,8•0,4•0,4 + 0,9•0,2•0,6•0,4 + 0,1•0,8•0,6•0,4

ACTIVIDAD 2:

En un libro de 120 páginas, hemos contado el número de errores ortográficos en cada una de las páginas. Los resultados se resumen en la siguiente tabla:

Nº Errores	Nº de Páginas
0	58
1	42
2	16
3	3
4	1

- **Al elegir una página al azar :**

A) ¿Cuál es la probabilidad de que no tenga ningún error ortográfico?

____

____

B) ¿Cuál es la probabilidad que tenga 2 errores ortográficos?

____

____

C) Que tenga más de tres errores.

Completa y resuelve los siguientes problemas, en el espacio asignado: 1) Experimento: lanzamientos de dos dados. A: la suma de los valores es impar. Ω =
2) En una bolsa hay 4 bolas rojas, 2 azules, 3 verdes y 1 amarilla. Extraemos una al azar, encuentra la probabilidad de que: Ω= a) Sea azul: b) No sea roja:
2) ¿Cuál es la probabilidad de que al lanzar una moneda salga cara? Ω= A: P(A)=

3) Al lanzar dos monedas, ¿cuál es la probabilidad de que salga una cara y un sello? Ω =
4)   Entre los alumnos de un 1º medio se sorteará un libro de poemas. Si en el curso hay 18 hombres y 20 mujeres ¿Cuál es la probabilidad de que el ganador del libro sea un hombre?

5) Al tirar una moneda y un dado se obtienen:

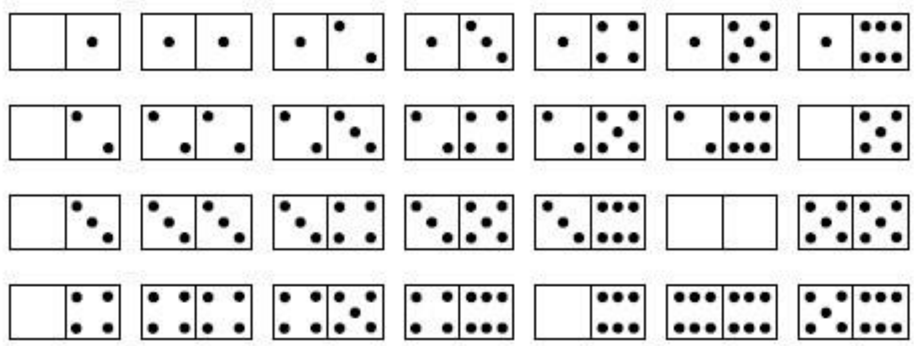
Ω=

A) ¿Cuál es la cardinalidad del espacio muestral?

B) Escribe los elementos del suceso " obtener una cara y un número par"

C) Escribe los elementos del suceso "obtener un número mayor que 2"

6) El juego de domino consta de 28 fichas que se muestran a continuación.

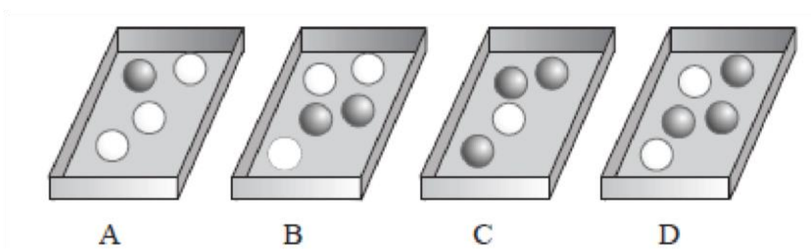


En este juego aquel que tienen el mismo número de puntos o que no tienen puntos a ambos lados de la raya divisoria de cada ficha, se le llama "chancho" ¿Cuál es la probabilidad que una persona saque el azar un "chancho"?

Desarrollo:

Respuesta:___________________________

7) ¿En cuál de estas cajas hay más probabilidad de sacar, sin mirar, una bolita negra?



8. En una bolsa hay 36 fichas numeradas del 1 al 36, respectivamente. Si extraes una ficha, calcula la probabilidad de que la ficha extraída sea: i. Un número par.
ii. Un número múltiplo de
5.

iii. Un número primo. iv.
Un número terminado en 2. v.
Un número divisible por 6.
vi. Un número impar mayor que 20.

TRIÁNGULO DE PASCAL:

Si queremos calcular la probabilidad de un experimento aleatorio como lanzar una moneda repetidamente, podemos utilizar los coeficientes del triángulo de Pascal (o de Tartaglia, en rigor de Zhu Shijie, un matemático chino, quien lo descubrió 300 años antes que Pascal).

¿Cómo lo hacemos?

Si n es la cantidad de lanzamientos, x la cantidad de éxitos y n-x la cantidad de fracasos, para obtener los casos favorables, buscamos en la fila n-ésima del triángulo el coeficiente de la

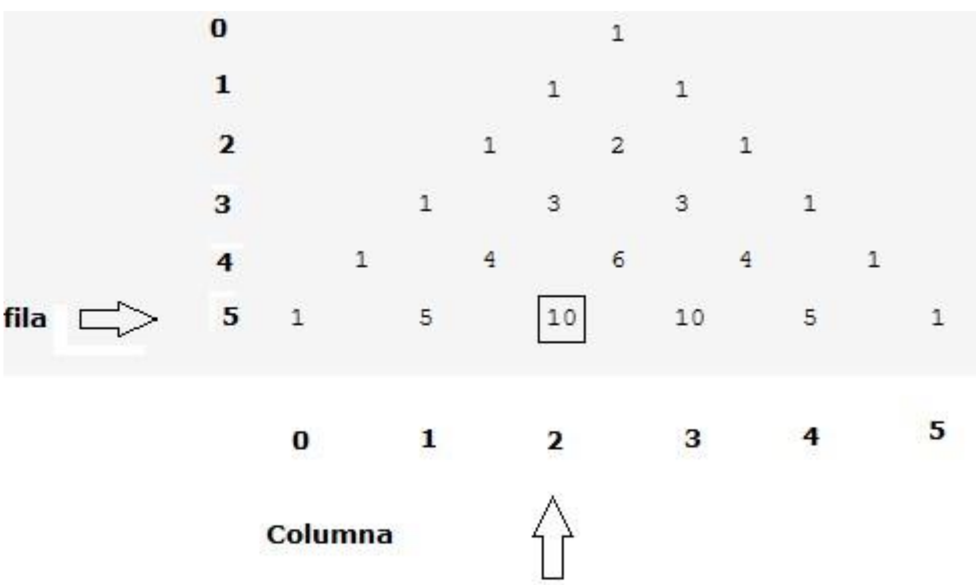
columna x de dicha fila (x=0,1,2,…n). Los casos posibles son 2^n

Ejemplo: Si lanzamos 5 veces una moneda (o 5 monedas de una vez) ¿Cuál es la probabilidad de:

A) Obtener sólo dos caras?
B) Obtener a lo más 3 sellos?

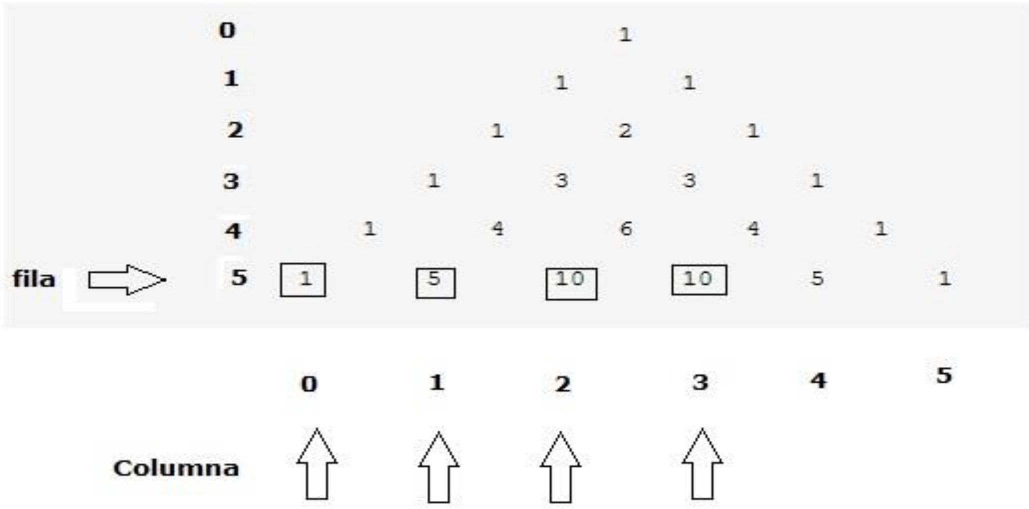
Solución: usemos el triángulo de Pascal hasta la fila 5 (partiendo desde cero)

A) n=5 , x=2 (cantidad de caras)



$$P = \frac{10}{2^5} = \frac{10}{32} = \frac{5}{16}$$

B) n=5 , x=0, x=1, x=2, x=3 (x cantidad de sellos)



$$P = \frac{1+5+10+10}{32} = \frac{26}{32} = \frac{13}{16}$$

Nota: En este caso sería más corto calcular la probabilidad usando el complemento , (x=4, x=5) es decir:

$$P = 1 - \frac{1+5}{32} = 1 - \frac{3}{16} = \frac{13}{16}$$

PRINCIPIO COMBINATORIO MULTIPLICATIVO

Se tienen los elementos $k_1, k_2, k_3, \ldots, k_n$ que pueden ser elegidos de formas distintas.

Por lo tanto, si se quieren elegir todos los elementos, entonces se pueden escoger de

$k_1 \cdot k_2 \cdot k_3 \cdot \ldots \cdot k_n$ maneras diferentes.

Ejemplo 1: ¿Cuántos números impares de tres cifras se pueden formar usando los números 1, 2, 4, 5, 6, 7 y 9, si estos no pueden repetirse?

5 6 4

Para que el número sea impar se tienen 4 opciones el {1, 5, 7, 9}

En total hay 7 números. Como ya se ocupó uno en la última cifra solo quedan 6 opciones.

En total hay 7 números. Si ya se ocuparon dos, solo quedan 5 opciones.

Por lo tanto, se pueden formar **5 · 6 · 4 = 120 números.**

Ejemplo 2: Una empresa inmobiliaria fue contratada para construir una casa. Los cimientos de la cas pueden ser de dos maneras: concreto o bloques de cemento. Las paredes pueden ser de adobe, cemento o ladrillo y el techo puede ser de madera o lámina galvanizada.

En este caso, la casa se puede construir de 12 maneras diferentes, pues se tienen:

2 opciones para hacer cimientos
3 opciones para hacer las paredes
2 opciones para hacer el techo

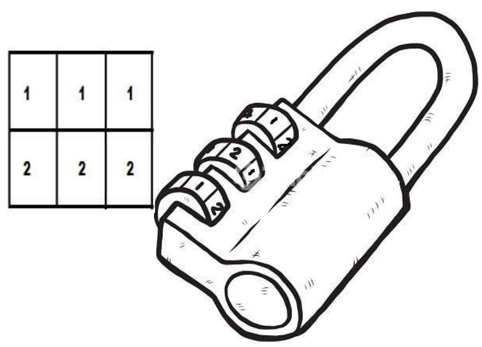
Luego, aplicamos el principio multiplicativo: 2•3•2 = 12 maneras diferentes de construir la casa.

Nota: este principio se puede aplicar a más de dos eventos.

<u>ACTIVIDAD 3: Trabaja en pareja o en grupo las siguientes situaciones.</u>

<u>Situación 1:</u> Anacleto desea realizar un viaje y para asegurar su maleta decide comprar un candado de claves en una tienda. El vendedor le ofrece las siguientes opciones:
El candado A tiene dos casillas y en cada una de ellas puede escoger entre los dígitos 1 y 2.

El candado B tiene 3 casillas con 2 dígitos: 1 y 2.
El candado C tiene 3 casillas con 3 dígitos: 1, 2 y 3.
El candado D tiene 3 casillas con 4 dígitos: 1, 2, 3 y 4
El candado E tiene 4 casillas con 5 dígitos.



a) ¿Cuántas son las posibles combinaciones de claves numéricas que se pueden obtener en cada candado?

b) Considerando los casos anteriores, establece una expresión matemática que represente las posibles combinaciones que puede formar Anacleto conociendo el número de casillas (***n***) y de dígitos (***a***). Comenta y compara con tus compañeros de grupo.

c) El vendedor le ofrece dos candados más: uno que tiene 3 dígitos y se pueden obtener 243 combinaciones posibles, y en el otro se pueden hacer 64 combinaciones con solo 2 dígitos, determina el número de casillas que tiene cada candado.

d) ¿Cómo obtuviste la respuesta?
Comparte con el curso lo realizado, argumentando tus respuestas.

Situación 2: Una heladería ofrece una copa al gusto de cada cliente. Para eso, cada persona debe escoger una opción de las dadas en el siguiente menú:

En Copa:	Helado de:	Bañarse en:	Rociado con:
▯ Plástica ▯ De galleta	▯ Frutilla ▯ Lúcuma ▯ Vainilla	▯ Crema ▯ Chocolate	▯ Coco rayado ▯ Chips • Pelotitas dulces • Caramelo

a) ¿De cuántas maneras es posible armar una copa?
b) Por un problema de stock el rociado se acabó, ¿cuántas serán las posibles maneras de armar una copa sin el rociado?
Responde por escrito en tu hoja y comunica tu respuesta al curso.

ACTIVIDAD 4:

1) De un grupo de 7 hombres y 4 mujeres se va a elegir una comisión de 3 personas. Calcular cuantas comisión se pueden formar si esta está conformada por:

a) 3 hombres
b) 2 hombres y una mujer

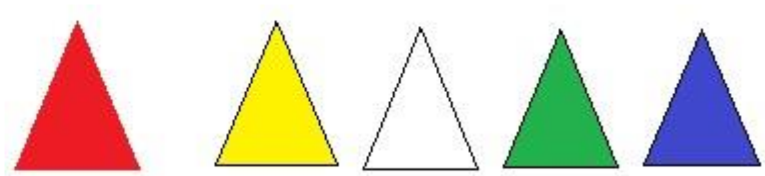
2) ¿Cuántos pares de letras vocales distintas existen?

3) Calcula cuántos tríos de letras vocales se pueden formar, con la condición que: a) la primera letra sea a
b) la letra del medio sea e
c) la última letra sea o
d) ninguna letra aparezca repetida

4) a partir de los 5 triángulos dados (rojo, amarillo, blanco, verde y azul):

a) ¿De cuántas maneras diferentes se pueden formar filas de tres triángulos de distintos colores?

b) ¿De cuántas maneras se pueden formar filas de tres triángulos de distinto colores si en todos los tríos tiene que haber un triángulo verde?



TEST

Marca la opción correcta en cada caso.

1) Al lanzar un dado común, ¿Cuál(es) de la(s) siguientes proposiciones es(son) verdadera(s)

I) Que salga un 2 es más probable que salga un 6
II) La probabilidad de obtener un número impar es ½
III) La probabilidad de obtener un número múltiplo de 3 es 1/6

A) Sólo I
B) Sólo II
C) Sólo I y II
D) Sólo II y III
E) I, II y III

2) En la lista de un curso de 40 alumnos hay 17 niñas. Si se escoge un número al azar entre 1 y 40 ¿Cuál es la probabilidad de que ese número corresponda al número de lista de una niña del curso?

A) 17/40
B) 1/40
C) 1/17
D) 17/23
E) 23/40

3) Una caja tiene 12 esferas de igual tamaño y peso. Cada una de ellas contiene una letra de la palabra DEPARTAMENTO. ¿Cuál(es) de la(s) siguientes afirmaciones es(son) verdadera(s)

I) La probabilidad de sacar una M es 1/12
II) La probabilidad de no sacar una vocal es 7/12
III) La probabilidad de sacar una A es la misma que de sacar una T

A) Sólo I
B) Sólo III
C) Sólo I y II
D) Sólo I y III
E) I, II y III

4) Si se elige al azar un número entre 1 y 30. ¿Cuál es la probabilidad de que ese número sea múltiplo de 4?

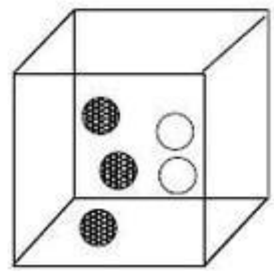
A) 3/30
B) 23/30
C) 7/30
D) 8/30
E) 6/30

5) ¿Cuál es la probabilidad de que al lanzar 4 veces una moneda, salgan sólo 2 caras?

A) 8/16
B) 6/16
C) 2/16
D) 1/16
E) 4/16

6) En la caja de la figura hay fichas negras(N) y blancas(B) de igual tamaño y peso. ¿Cuántas fichas hay que agregar para que la probabilidad de extraer una ficha negra sea 2/3?

A) 1N y 0B
B) 1N y 3B
C) 1N y 4B
D) 1N y 1B
F) 0N y 1B



7) ¿En cuál(es) de las siguientes afirmaciones, la probabilidad de ocurrencia del suceso mencionado, es siempre igual a la probabilidad de no ocurrencia del mismo suceso?

I) Que salga sello en el lanzamiento de una moneda.
II) Que salga un número impar, al lanzar un dado común
III) Que salga una ficha verde al extraerla al azar, desde una urna que contiene sólo fichas rojas y verdes, todas del mismo tipo.

A) Sólo I
B) Sólo III
C) Sólo I y II
D) Sólo I y III
E) I, II y III

8) La probabilidad porcentual de que salgan dos números iguales al lanzar dos dados es:

A) 10% B) 12% C) 16,6% D) 33,3% E) 50%

9) Un árbol tiene 30 ramas. Si de cada una de ellas salen 12 brotes y de cada brote crecen 5 hojas, ¿cuál es el número total de hojas del árbol?

A) 60 B) 150 C) 180 D) 360 E) 1800

10) ¿Cuántas palabras distintas, con o sin sentido, se pueden formar al reordenar las letras de la palabra EXPLORA?

A) 49
B) 343
C) 420
D) 2.401
E) 5.040

RESPUESTAS:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
B	A	E	C	B	A	C	C	E	E