INSTITUTO NACIONAL JOSÉ MIGUEL CARRERA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
SÉPTIMO BÁSICO
Coordinador: Jorge Varela Sierra.
Primer Semestre 2019

GUÍA N°1 – TEORÍA DE CONJUNTOS.

Nombre: ____ Curso: 7°___ Fecha: ___/___/_____

Algunos símbolos que se utilizan en matemática son:

$\forall$	para todo	$($	paréntesis circular
$\exists$	existe	$[$	paréntesis de corchete (o cuadrado)
$\nexists$	no existe	$\{$	paréntesis de llaves
$\exists!$	existe un único	$\lvert x \rvert$	valor absoluto de una cantidad “x”
$\in$	pertenece a	$\measuredangle$	ángulo
$\notin$	no pertenece a	$\perp$	perpendicular a
$\subset$	subconjunto	$\therefore$	por lo tanto
$\subseteq$	subconjunto o igual a	$\parallel$	paralelo a
$\supset$	superconjunto	$\cong$	congruente a
$\cup$	unión	$\sim$	semejante a
$\cap$	intersección	α	alfa
$\Rightarrow$	entonces	β	beta
$\Leftrightarrow$	si y sólo si	γ	gamma
$\mid$	tal que	δ	delta
$\wedge$	conector lógico y	ε	epsilón
$\vee$	conector lógico o	θ	theta
$\emptyset$	conjunto vacío	λ	lambda
$\{\quad\}$	conjunto vacío	π	pi
$\#$	cardinalidad (en teoría de conjuntos)	φ	phi
$\#$	paralelegramo (en geometría)	ω	omega
∞	infinito	Ω	omega mayúscula
$=$	es igual a	Σ	sigma mayúscula (símbolo de sumatoria)
$\neq$	no es igual a (distinto de)	$\odot$	circunferencia
$<$	menor que	$\mathbb{N}$	Conjunto de los números Naturales
$\leq$	menor o igual que	$\mathbb{N}_0$	Conjunto de los números Cardinales
$>$	mayor que	$\mathbb{Z}$	Conjunto de los números Enteros
$\geq$	mayor o igual que	$\mathbb{Q}$	Conjunto de los números Racionales
$\approx$	aproximadamente	$\mathbb{I}$	Conjunto de los números Irracionales
$\equiv$	idéntico a	$\mathbb{R}$	Conjunto de los números Reales

CONJUNTOS.

El concepto de conjunto es fundamental en todas las ramas de la matemática. El concepto de conjunto es primitivo y no se puede definir, pero intuitivamente un **conjunto** es una lista, colección o reunión de objetos con una característica en común. Los objetos que forman un conjunto se llaman **elementos**.

Ejemplos:

$V = \{a, e, i, o, u\}$
$A = \{rojo, amarillo, az\acute{u}l\}$
$B = \{lunes, martes, mi\acute{e}rcoles, jueves, viernes, s\acute{a}bado, domingo\}$

Observaciones:

- Los conjuntos se denotan por letras mayúsculas.
- Los elementos de los conjuntos se representan por letras minúsculas.

Un conjunto lo podemos expresar de dos formas:

Por extensión.

Significa enumerar todos sus elementos uno a uno separados por comas y encerrándolos entre paréntesis de llaves.

Ejemplos:

$A = \{a, e, i, o, u\}$
$B = \{1,2,3,4,5\}$
$C = \{2,4,6,8\}$

Por comprensión.

Significa enunciar los requisitos, propiedades o cualidad que deben tener los elementos del conjunto y solo ellos.

Ejemplos:

$A = \{x | x \text{ es vocal del abecedario}\}$
$B = \{x \in \mathbb{N} | x \leq 5\}$
$C = \{x | x \text{ es par menor a } 10\}$

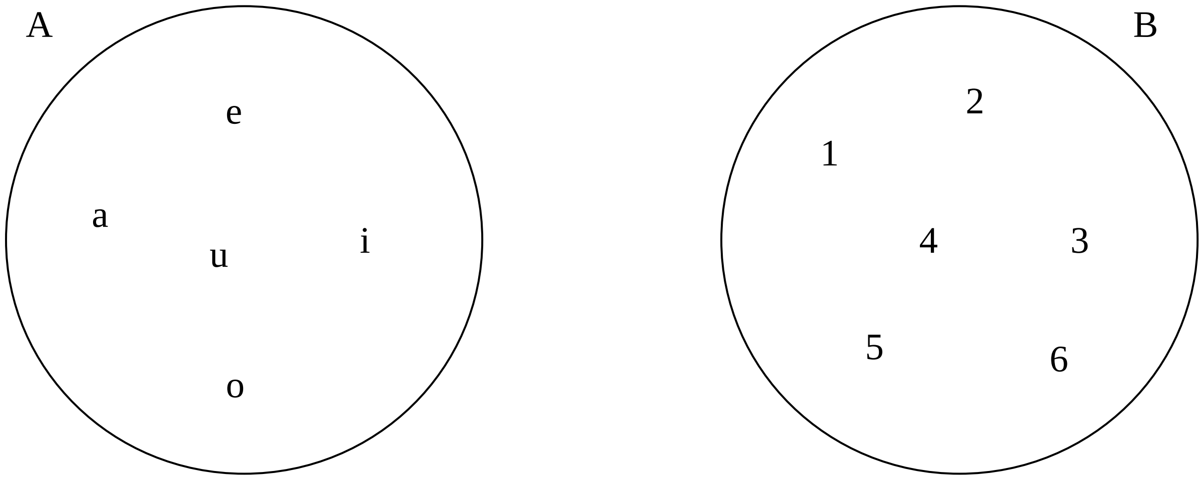
DIAGRAMA DE VENN - EULER.

Los Diagramas de Venn – Euler, o simplemente Diagramas de Venn, son esquemas utilizados en la teoría de conjuntos para mostrar en forma ordenada los elementos de un conjunto encerrados por una circunferencia.

Ejemplo:

Sean los conjuntos

$A = \{vocales\ del\ abecedario\}$
$B = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 7\}$



ACTIVIDAD 1.
Escribe por extensión los siguientes conjuntos.

a) $H = \{letras\ de\ la\ palabra\ SEPTIMO\}$

$H = \{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\ \}$

b) $J = \{letras\ de\ la\ palabra\ MATEMÁTICA\}$

$J = \{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\ \}$

c) $G = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 < x < 5\}$

$G = \{\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\ \}$

d) $P = \{x \in \mathbb{N} \mid x = 2p\ \wedge\ 2 < x < 8\}$

$P = \{\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\ \}$

e) $M = \{x \in \mathbb{N} \mid x = 2n - 1\ \wedge\ 1 < x \leq 11\}$

$M = \{\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\ \}$

ACTIVIDAD 2.
Escribe por comprensión los siguientes conjuntos.

a) $D = \{5, 6, 7, 8\}$

$D = \{\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\ \}$

b) $L = \{7\}$

$L = \{\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\ \}$

c) $C = \{11, 13, 15, 17, 19\}$

$C = \{\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\ \}$

d) $T = \{2, 4, 6, 8\}$

$T = \{\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\ \}$

e) $M = \{d, e, p, o, r, t\}$

$M = \{\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\ \}$

ACTIVIDAD 3.
Representa en un Diagrama de Venn cada conjunto.

a) $Z = \{a, t, u, n\}$

b) $W = \{x \in \mathbb{N} \mid 3 \leq x < 10\}$

PERTENENCIA.

Si un objeto $\boldsymbol{x}$ es elemento de un conjunto $\boldsymbol{A}$, es decir, si $\boldsymbol{A}$ contiene a $\boldsymbol{x}$ como uno de sus elementos, se escribe $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A}$ y se lee $<< x\ pertenece\ a\ A >>$.

Si un objeto $\boldsymbol{x}$ no es elemento de un conjunto $\boldsymbol{A}$, es decir, si $\boldsymbol{A}$ no contiene a $\boldsymbol{x}$ como uno de sus elementos, se escribe $\boldsymbol{x} \notin \boldsymbol{A}$ y se lee $<< x\ \boldsymbol{no\ pertenece\ a\ A} >>$.

Ejemplo:

Dado el conjunto $\boldsymbol{A} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{N}\ |\boldsymbol{x} < 5\}$ se puede afirmar que **1** $\in$ $\boldsymbol{A}$**, 2** $\in$ $\boldsymbol{A}$**, 3** $\in$ $\boldsymbol{A}$**, 4**$\in$ $\boldsymbol{A}$**, 5** $\notin$ $\boldsymbol{A}$**, 6** $\notin$ $\boldsymbol{A}$, etc.

CARDINALIDAD DE CONJUNTOS (#).

Corresponde al número de elementos que tiene un conjunto.

Ejemplo:

Si $B = \{r, s, t\}$, entonces $\#\,(B) = 3$

Observaciones:
- Si la cardinalidad de un conjunto es **finita**, significa que el número de sus elementos es **limitado**.
- Si la cardinalidad de un conjunto es **infinita**, significa que el número de sus elementos es **ilimitado**.

CONJUNTO UNIVERSO.

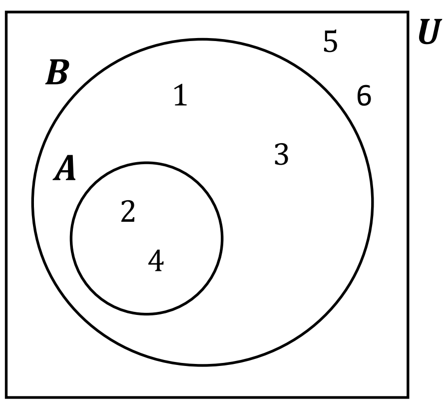
Es el conjunto de referencia que agrupa a todos los elementos existentes. El conjunto universo se denota por la letra U.

SUBCONJUNTOS.

Si todos los elementos de un conjunto **A** están en un conjunto **B**, se dice que **A es subconjunto de B** y se escribe $\boldsymbol{A} \subset \boldsymbol{B}$.

Ejemplo:

Dados los conjuntos $U = \{x \in \mathbb{N}\ |\ x < 7\}$, $A = \{2, 4\}$ y $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.



$\boldsymbol{A} \subset \boldsymbol{B}$

$\_\_ \subset \boldsymbol{U}$

$\boldsymbol{A} \subset \_\_$

Con los elementos de un conjunto se pueden formar varios subconjuntos.

Ejemplo:

Dado el conjunto $B = \{x \in\ \ |\ x < 5\}$.
Los subconjuntos que se pueden formar con los elementos de B son:

$$\{1\}\ \ \{2\}\ \ \{3\}\ \ \{4\}\ \ \{1,2\}\ \ \{1,3\}\ \ \{1,4\}\ \ \{2,3\}$$
$$\{2,4\}\ \ \{3,4\}\ \ \{1,2,3\}\ \ \{1,2,4\}\ \ \{1,3,4\}\ \ \{2,3,4\}\ \ \{1,2,3,4\}\ \ \{\ \ \}$$

Observaciones:
- Todo subconjunto que tenga menos elementos que el conjunto del que forman parte, se llama **Subconjunto Propio**.
- El **conjunto vacío** es un conjunto que carece de elementos y se denota por el símbolo $\emptyset$ o con dos llaves de conjunto separadas por un espacio en blanco {   }.
- El conjunto vacío es subconjunto de todo conjunto.
- Un **conjunto Unitario o Singleton** es un conjunto que tiene sólo un elemento.
- Todo conjunto es subconjunto de sí mismo.

ACTIVIDAD 4.

Dados los conjuntos $A = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$, $B = \{x \in \mathbb{N}_0 \mid x < 10\}$, $C = \{2, 4, 6\}$ indica si cada afirmación es Verdadera (V) o Falsa (F).

a) ______ $1 \in A$

b) ______ $6 \notin A$

c) ______ $7 \notin A$

d) ______ $4 \in A$

e) ______ $1 \in C$

f) ______ $3 \in B$

g) ______ $3 \notin B$

h) ______ $2 \in C$

i) ______ $3 \in A$

j) ______ $7 \in C$

k) ______ $5 \notin B$

l) ______ $1 \notin A$

m) ______ $9 \notin C$

n) ______ $5 \notin C$

o) ______ $11 \in B$

p) ______ $8 \in B$

ACTIVIDAD 5.

Completa la siguiente tabla con la información correcta (Pertenencia y Cardinalidad).

Conjunto	Pertenencia	Cardinalidad
$P = \{a, b, c\}$	e _____ P b _____ P	$\# P =$ _______
$Q = \{x \in \mathbb{N} \mid 5 \leq x < 12\}$	5 _____ Q 12 _____ Q	$\# Q =$ _______
$R = \{x \in \mathbb{N} \mid x = 2n - 1 \wedge 3 \leq x < 9\}$	3 _____ R 8 _____ R	$\# R =$ _______

ACTIVIDAD 6.

Dado el conjunto universo $U = \mathbb{N}$. Sean los conjuntos $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x = 5n \wedge x \leq 20\}$, $S = \{2, 4, 6, 8\}$ $F = \{2\}$ $J = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 11\}$. Determina si cada afirmación es Verdadera (V) o Falsa (F).

a) ______ $A \subset U$

b) ______ $S \subset F$

c) ______ $J \not\subset S$

d) ______ $\{5\} \subset A$

e) ______ $\{6, 8\} \subset U$

f) ______ $\{1, 2\} \not\subset J$

g) ______ $\{2, 3, 4\} \subset J$

h) ______ $\{10, 20\} \not\subset A$

i) ______ $S \subset J$

j) ______ $F \not\subset A$

k) ______ $A \not\subset J$

l) ______ $J \subset U$

CONJUNTO POTENCIA.

El conjunto potencia es el conjunto que tiene por elementos a todos los subconjuntos de un conjunto. Es decir, el conjunto potencia $\boldsymbol{\mathcal{P}(A)}$ es el conjunto formado por todos los subconjuntos de $\boldsymbol{A}$.

La cardinalidad del conjunto potencia se puede determinar utilizando la expresión 2^n, donde n corresponde al número de elementos del conjunto.

Ejemplo:
Dado el conjunto $B = \{1, 2, 3, 4\}$. El conjunto potencia $\mathcal{P}(B)$ es:

$$\mathcal{P}(B) = \left\{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{3,4\}, \{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{1,3,4\}, \{2,3,4\}, \{1,2,3,4\}, \emptyset\right\}$$

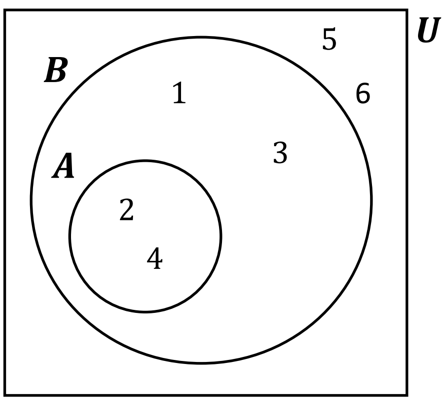
El conjunto B tiene $\boldsymbol{n = 4}$ elementos, la expresión $\mathbf{2^4 \ = \ 2 \times 2 \times 2 \times 2}$ determina la cantidad de subconjuntos que se pueden formar con los elementos de B. Es así que el conjunto potencia de B está formado por 16 elementos.

$$\therefore \quad \# \, \mathcal{P}(B) = 16$$

SUPERCONJUNTO.

B es superconjunto de A si A es subconjunto de B y se denota por $\boldsymbol{B \supset A}$.

Ejemplo:
Dados los conjuntos $U = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 7\}$, $A = \{2, 4\}$ y $B = \{1, 2, 3, 4\}$.



$\boldsymbol{B \supset A}$

$\_\_ \supset \boldsymbol{A}$

$\boldsymbol{U} \supset \_\_$

DIFERENCIA ENTRE PERTENENCIA E INCLUSIÓN.

Pertenencia.
Relacionar un **elemento** con un **conjunto**.
Se utiliza el símbolo $\in$.

$\neq$

Inclusión.
Relacionar un **conjunto** con otro **conjunto**.
Se utiliza el símbolo $\subset$.

Ejemplo: Sea el conjunto $A = \{a, e, i, o, u\}$ <<El elemento a pertenece al conjunto A>> $a \in A$
<<El conjunto $\{a, e\}$ esta incluido (subconjunto de) en el conjunto A>> $\{a, e\} \subset A$.

CONJUNTOS EQUIVALENTES O COORDINABLES.

Dos conjuntos son equivalentes (o coordinables) si y solo si los conjuntos tienen igual cardinalidad. Los conjuntos equivalentes tienen correspondencia uno a uno.

Ejemplo:

$A = \{1, 2, 3\}$
$\# \, A = 3$

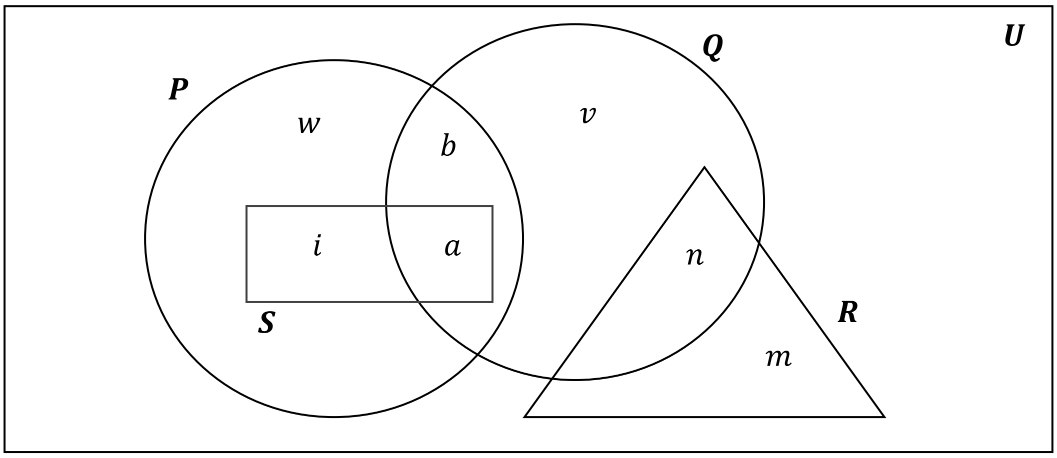
$B = \{x, y, z\}$
$\# \, B = 3$

CONJUNTOS IGUALES.

Dos conjuntos son iguales si y solo si ambos conjuntos están formados por los mismos elementos, sin importar el orden en que aparezcan.

Ejemplo:
$A = \{j, v, s\}$ y $B = \{s, j, v\}$
A y B son conjuntos iguales.

ACTIVIDAD 7.
Observa los conjuntos del siguiente diagrama y completa con los símbolos ∈, ∉, ⊂, ⊄ o ⊃ según corresponda.



a) P _____ Q

b) m _____ Q

c) $\{m\}$ _____ R

d) n _____ R

e) P _____ S

f) $\{n\}$ _____ Q

g) P_____ U

h) U _____ Q

i) $\{a, i\}$ _____ S

j) b _____ S

k) S _____ P

l) w _____ P

m) $\{b, v\}$ _____ Q

n) $\emptyset$ _____ S

ACTIVIDAD 8.
Escribe por extensión el conjunto potencia de cada conjunto.

a) $A = \{15\}$

$\mathcal{P}(A) = \{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\}$

b) $B = \{a, b\}$

$\mathcal{P}(B) = \{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\}$

c) $C = \{x \in \mathbb{N} \mid 4 < x < 8\}$

$\mathcal{P}(C) = \{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\}$

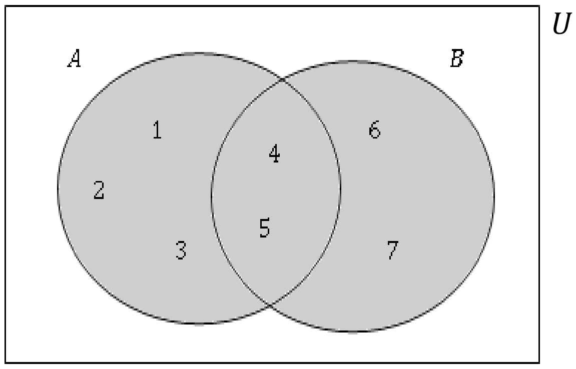
ACTIVIDAD 9.
Escribe en la respuesta si el conjunto de la columna A es igual o equivalente al conjunto de la columna B

A	B	RESPUESTA.
$\{a, e, i, o, u\}$	$\{x \in \mathbb{N} \mid x\ es\ impar \land x \leq 9\}$	
$\{0, 1\}$	$\{x \mid x\ es\ divisor\ de\ 17\}$	
$\{x \in \mathbb{N} \mid 4 < x < 8\}$	$\{7, 5, 6\}$	
$\{x \in \mathbb{N} \mid x + 4 = 12\}$	$\{x \in \mathbb{N} \mid x - 3 = 5\}$	

OPERACIONES ENTRE CONJUNTOS.

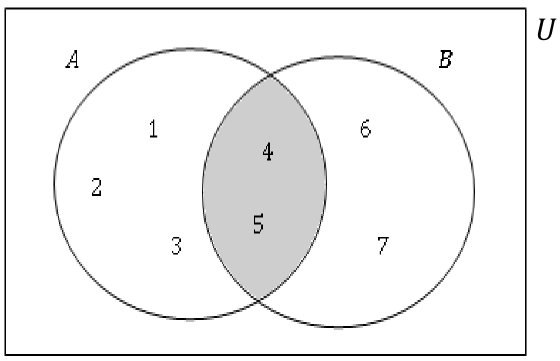
1. Unión de conjuntos: es la operación que nos permite agrupar los elementos de dos o más conjuntos en un nuevo conjunto. El símbolo que utilizamos es ∪.

   Ejemplo:
   $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y $B = \{4, 5, 6, 7\}$ entonces $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$



2. Intersección de conjuntos: es la operación que nos permite agrupar en un nuevo conjunto sólo los elementos que tienen en común los conjuntos. El símbolo que utilizamos es ∩.

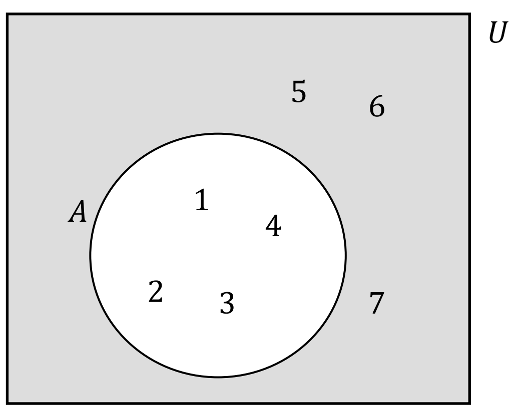
   Ejemplo:
   $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y $B = \{4, 5, 6, 7\}$ entonces $A \cap B = \{4, 5\}$



- Si no existen elementos en común entre dos conjuntos, significa que la intersección es el conjunto vacío.
- Si la intersección de dos conjuntos es el conjunto vacío, entonces se dice que los **conjuntos son Disjuntos**.

3. Complemento de conjuntos: es el conjunto que agrupa a todos los elementos que faltan en un conjunto para completar el Universo de referencia.

   Ejemplo:
   Sean $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ entonces el complemento del conjunto A es $A^C = \{5, 6, 7\}$.

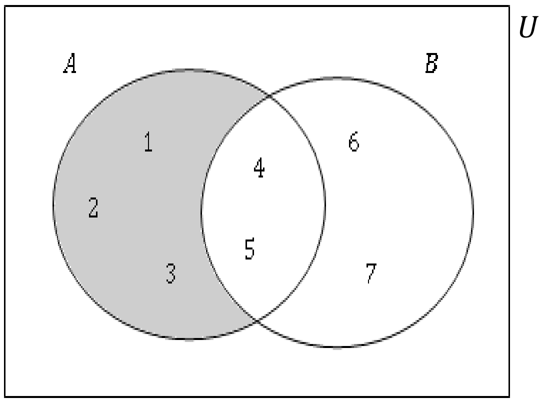


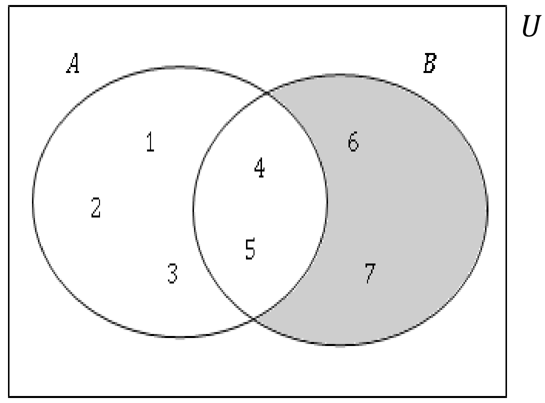
- El complemento del conjunto vacío es el conjunto universo.
- El complemento del conjunto universo es el conjunto vacío.

4. <u>Diferencia de conjuntos:</u> la diferencia de los conjuntos A y B es el conjunto de elementos que pertenecen a A, pero no a B. Es decir, es el conjunto de todos los elementos que pertenecen solo a A. Se denota $A - B$.

Ejemplo:
$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y $B = \{4, 5, 6, 7\}$ entonces

$A - B = \{1, 2, 3\}$ $B - A = \{6, 7\}$





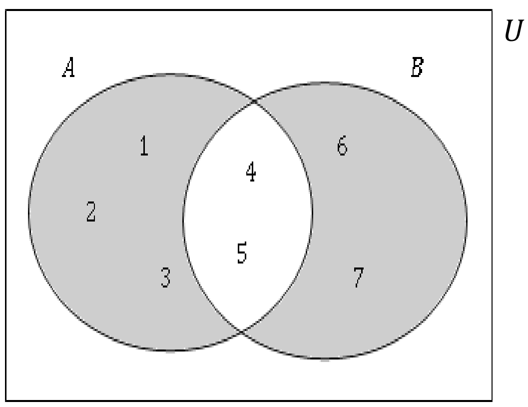
Observación:

- La diferencia de A con B no es igual a la diferencia de B con A.

$$A - B \neq B - A$$

5. <u>Diferencia Simétrica:</u> la diferencia simétrica entre los conjuntos A y B corresponde al conjunto que se forma de todos los elementos que pertenecen solo a A o solo a B. El símbolo que ocupamos es Δ

Ejemplo:
$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y $B = \{4, 5, 6, 7\}$ entonces $A \, \Delta \, B = \{1, 2, 3, 6, 7\}$



ACTIVIDAD 10.

Dados los conjuntos $U = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 9\}$, $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 2 \leq x \leq 8\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$, $C = \{3, 4, 5, 6\}$. Escribe por extensión los siguientes conjuntos

a) $A \cup B = \{\dots\}$

b) $A \cup C = \{\dots\}$

c) $A \cap B = \{\dots\}$

d) $B \cap C = \{\dots\}$

e) $A - B = \{\dots\}$

f) $B - C = \{\dots\}$

g) $A \,\Delta\, C = \{\dots\}$

h) $B \cup C = \{\dots\}$

i) $A \cup B \cup C = \{\dots\}$

j) $A \cap C = \{\dots\}$

k) $A \cap B \cap C = \{\dots\}$

l) $A - C = \{\dots\}$

m) $A \,\Delta\, B = \{\dots\}$

n) $B \,\Delta\, C = \{\dots\}$

ACTIVIDAD 11.

Dados los conjuntos $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 6\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x = 2n - 1 \ \wedge\ 3 \leq x \leq 9 \ \wedge\ n \in \mathbb{N}\}$ y $C = \{x \in \mathbb{N} \mid 3 < x \leq 8\}$.

a) Escriba por extensión los conjuntos A, B y C.

$A = \{ \qquad \}$

$B = \{ \qquad \}$

$C = \{ \qquad \}$

b) Escriba por extensión el conjunto $A \cup B \cup C$.

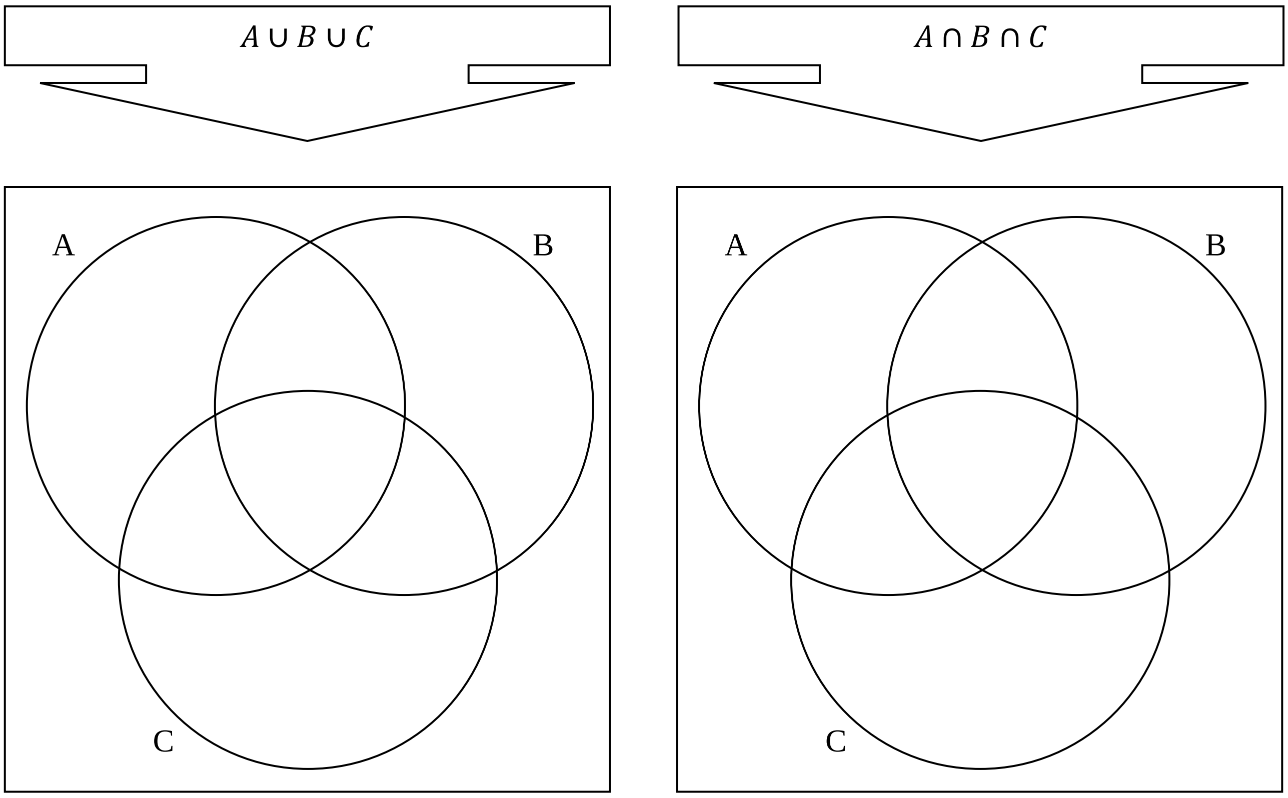
$A \cup B \cup C = \{ \qquad \}$

c) Escriba por extensión el conjunto $A \cap B \cap C$.

$A \cap B \cap C = \{ \qquad \}$

ACTIVIDAD 12.
Considerando los conjuntos A, B y C completa con los elementos cada diagrama de Venn y colorea el espacio correspondiente a la operación indicada.

$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 6\}$$
$$B = \{x \in \mathbb{N} \mid x = 2n - 1 \ \wedge \ 3 \leq x \leq 9 \ \wedge \ n \in \mathbb{N}\}$$
$$C = \{x \in \mathbb{N} \mid 3 < x \leq 8\}$$



ACTIVIDAD 13.
Completa en forma correcta cada afirmación dada.

a) Un ………………………………… intuitivamente es una agrupación de objetos.

b) Un ………………………………… es un conjunto que forma parte de otro conjunto.

c) Si queremos indicar que *“7 es uno de los elementos del conjunto M”*, simbólicamente es …………………………………..

d) El conjunto vacío es el que ……………..……………….. de elementos.

e) Dos conjuntos son …………………..………… si tienen la misma cardinalidad

f) Dos conjuntos son ……………………………… si tienen exactamente los mismos elementos.

g) Un subconjunto ……………………….. es aquel que tiene menos elementos que su conjunto principal.

h) El conjunto $F = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ tiene ………….….…. Subconjuntos.

i) El complemento del conjunto universo es el conjunto …………………….

j) El conjunto ……………………….. es el complemento del conjunto vacío.

k) La diferencia entre dos conjuntos A y B, corresponde al conjunto formado por todos los elementos de ……. que no están en …….

l) Dos conjuntos son ……………….…… ……….....…………, si su intersección es el conjunto vacío.

RELACIONES.

CONCEPTO DE PAR ORDENADO.

Intuitivamente, un par ordenado consta de dos elementos, a y b, que siguen un orden preestablecido. Un par ordenado se simboliza por (a, b), donde el primer elemento del par ordenado se llama primera componente y el segundo elemento se llama segunda componente.

Observaciones:

- Dos pares ordenados (a, b) y (c, d) son iguales si y solo si $a = c$ y $b = d$.
- El par ordenado $(a, b) \neq (b, a)$. Si cambiamos el orden de las componentes de un par, ellos serán diferentes.
- Puede haber pares ordenados que tengan las componentes iguales, por ejemplo (a, a)

PRODUCTO CARTESIANO.

Dados dos conjuntos A y B, se llama producto cartesiano de A y B al conjunto de todos los pares ordenados (a, b) con $a \in A$ y $b \in B$. Un producto cartesiano se denota por $A \times B$, se lee "A cruz B".

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$$

Si el conjunto A tiene m elementos y el conjunto B tiene n elementos, entonces $\#\,(A \times B) = m \cdot n$

Ejemplo:

Sea el conjunto universal $U = \mathbb{N}$, donde $A = \{1, 2\}$ y $B = \{3, 4, 5\}$. Entonces,

$$A \times B = \{(1,3), (1,4), (1,5), (2,3), (2,4), (2,5)\}$$
$$\#\,A = 2 \;\wedge\; \#\,B = 3 \implies \#\,(A \times B) = 6$$

ACTIVIDAD 14.
Dados los conjuntos $A = \{1, 3, 5\}$ y $B = \{2, 4\}$.

a) Calcule la cardinalidad de $A \times B$

$\#(A \times B) =$...........

b) Calcule la cardinalidad de $B \times A$

$\#(A \times B) =$............

c) Escriba por extensión el conjunto $A \times B$

$A \times B = \{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\}$

d) Escriba por extensión el conjunto $B \times A$

$B \times A = \{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\}$

ACTIVIDAD 15.
Dados los conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $B = \{1, 2, 3\}$.

a) Calcule la cardinalidad de $A \times B$

$\#(A \times B) =$...........

b) Calcule la cardinalidad de $B \times A$

$\#(A \times B) =$............

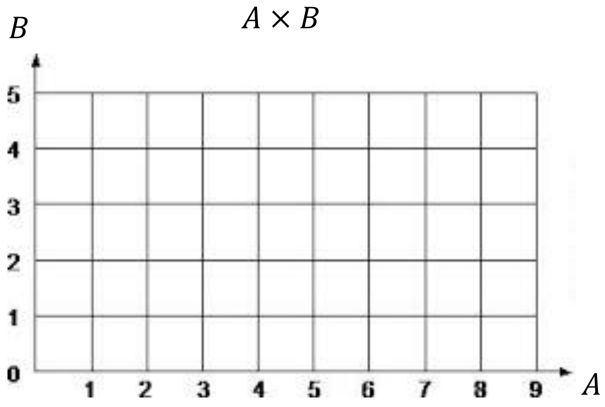
c) Escriba por extensión el conjunto $A \times B$

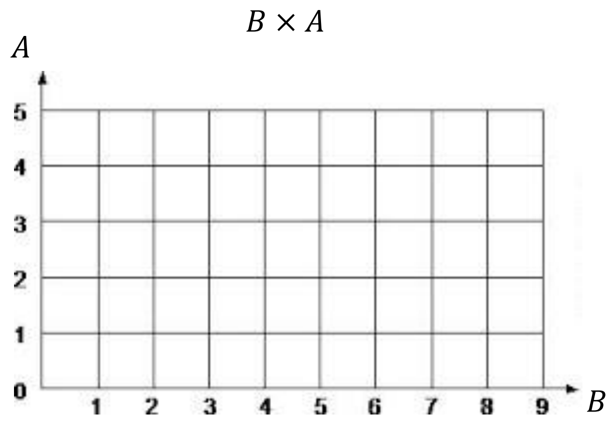
$A \times B = \{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\}$

d) Escriba por extensión el conjunto $B \times A$

$B \times A = \{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\}$

ACTIVIDAD 16.
Representa gráficamente los conjuntos $A \times B$ y $A \times B$ de la "Actividad 14".





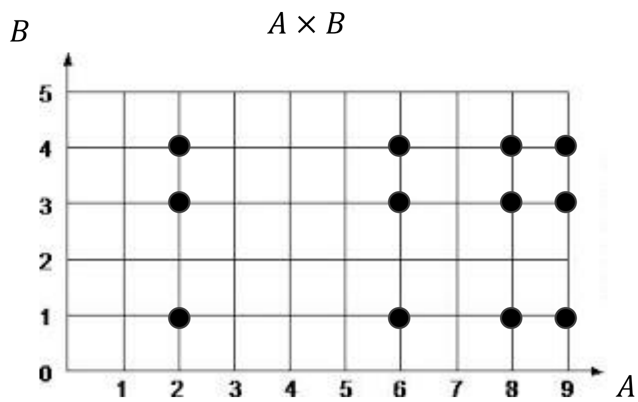
Observa las gráficas, ¿Qué puedes concluir respecto a $A \times B$ y $B \times A$?

……

……...

Simbólicamente se puede escribir:

ACTIVIDAD 17.
Observa el gráfico y escribe por extensión los conjuntos A, B y $A \times B$.



$A = \{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\}$

$B = \{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\}$

$A \times B = \{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\}$

RELACIÓN.

Dados los conjuntos A y B no vacíos, se llama relación definida de A en B a cualquier subconjunto del producto cartesiano $A \times B$.

$$R\ es\ relación\ definida\ de\ A\ en\ B \iff R \subseteq A \times B$$

$(a, b) \in R$ se escribe también $a\ R\ b$, y se lee "el elemento a está relacionado con el elemento b"

Una relación es un conjunto de pares ordenados, se denota $R : A \longrightarrow B$

Observaciones:

- $(a, b) \in R \iff a\ R\ b$
- $(a, b) \notin R \iff a \not R\ b$
- Si el conjunto A tiene m elementos y el conjunto B tiene n elemento, entonces hay $2^{m \cdot n}$ relaciones distintas entre A y B. como $A \times B$ tiene $m \cdot n$ elementos, tiene $2^{m \cdot n}$ subconjuntos diferentes.

Ejemplos:

a) Sean $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{a, b\}$. Entonces una relación R es $R = \{(1, a), (1, b), (3, a)\}$
b) Sean $A = \{2, 3, 4\}$ y $B = \{4, 6\}$. Entonces una relación R es $R = \{(a, b)\ | a \in A\ \wedge b \in B,\ b = a \cdot n,\ n \in \mathbb{N}\}$, escrito por extensión es $R = \{(2, 4), (2, 6), (3, 6), (4, 4)\}$

DOMINIO Y RECORRIDO DE UNA RELACIÓN.

Sea $R : A \longrightarrow B$ una relación y $(a, b) \in R$.

Se denomina **pre-imagen** a la primera componente de un par ordenado. Al conjunto de todas las pre-imágenes se le denomina **Dominio de la relación**.

$$Dom\ R = \{a \in A \mid \exists\ b \in B\ \wedge a\ R\ b\} \subset A$$

Se denomina **imagen** a la segunda componente de un par ordenado. Se denota $b = R(a)$. Al conjunto de todas las imágenes se le denomina **Recorrido de la relación**.

$$Rec\ R = \{b \in B \mid \exists\ a \in A\ \wedge a\ R\ b\} \subset B$$

Ejemplos:

a) Dada la relación $R = \{(1, a), (1, b), (3, a)\}$

$$Dom\ R = \{1, 3\}$$
$$Rec\ R = \{a, b\}$$

b) Dada la relación $R = \{(2, 7), (3, 8), (4, 7), (5, 8)\}$

$$Dom\ R = \{2, 3, 4, 5\}$$
$$Rec\ R = \{7, 8\}$$

ACTIVIDAD 18.
Dado los conjuntos A y B, escriba por extensión cada relación R.

a) $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $B = \{1, 3, 5\}$. $R = \{(x, y) \mid x < y\}$

b) $A = \{2, 3, 4, 5\}$ y $B = \{3, 6, 7, 10\}$. $R = \{(x, y) \mid y : x\ \in \mathbb{N}\}$

ACTIVIDAD 19.

Sea R una relación definida en los números naturales, donde $R = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} | x + 3y = 12\}$

a) Escriba por extensión la relación R.

$R = \{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.\}$

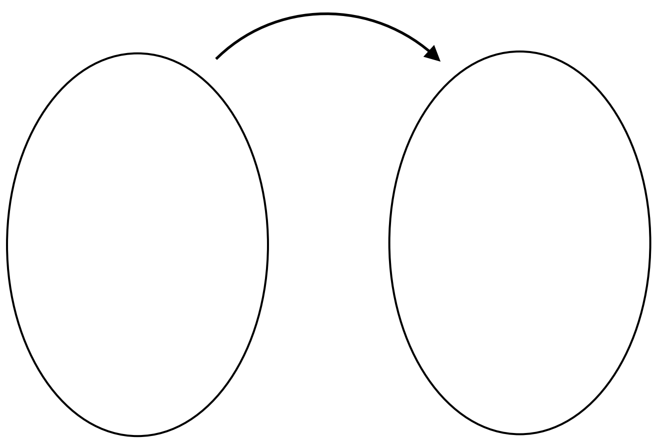
b) Escriba por comprensión el dominio de la relación R.

$Dom\ \ R = \{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.\}$

c) Escriba por comprensión el recorrido de la relación R.

$Rec\ \ R = \{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.\}$

d) Representa la relación R en un diagrama sagital.



e) Graficar la relación R en un plano cartesiano. Recuerda dar nombre a los ejes cartesianos.