MATEMATICA

CUARTO MEDIO - 2019 Profesor: Luis Arancibia

Gu´ıa
CUARTO MEDIO

Datos y Azar

La distribución normal

Hasta el momento, la función de distribución continua más importante es la distribución normal´. Muchos fenómenos naturales y sociales se ajustan a ella.

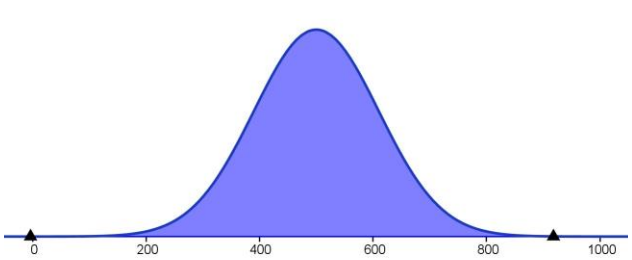
La distribución normal fue descubierta por De Moivre en 1733 como el valor límite de la función de probabilidad binomial $B(n, p)$, cuando n tiende a infinito. Medio siglo después volví´ o a descubrirse por Laplace y´ Gauss; ambos vieron que la distribución normal era la que aparentemente describe mejor el comportamiento de los errores en las medidas.

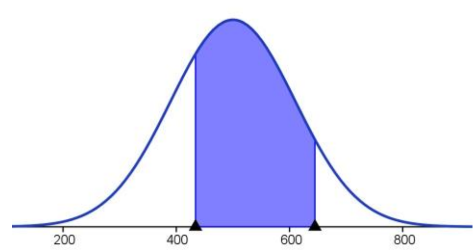
La función de densidad de la distribución normal se debe eso si a Gauss y es de tipo exponencial, la que solo será enunciada, su demostración, construcción y cualquier otro fundamento queda muy fuera de nuestro alcance.

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

La demostración de que $S[-\infty, +\infty] = 1$, es decir, el área entre el eje x y la función fue dada primeramente por Laplace.

Su gráfica es la mentada campana de Gauss



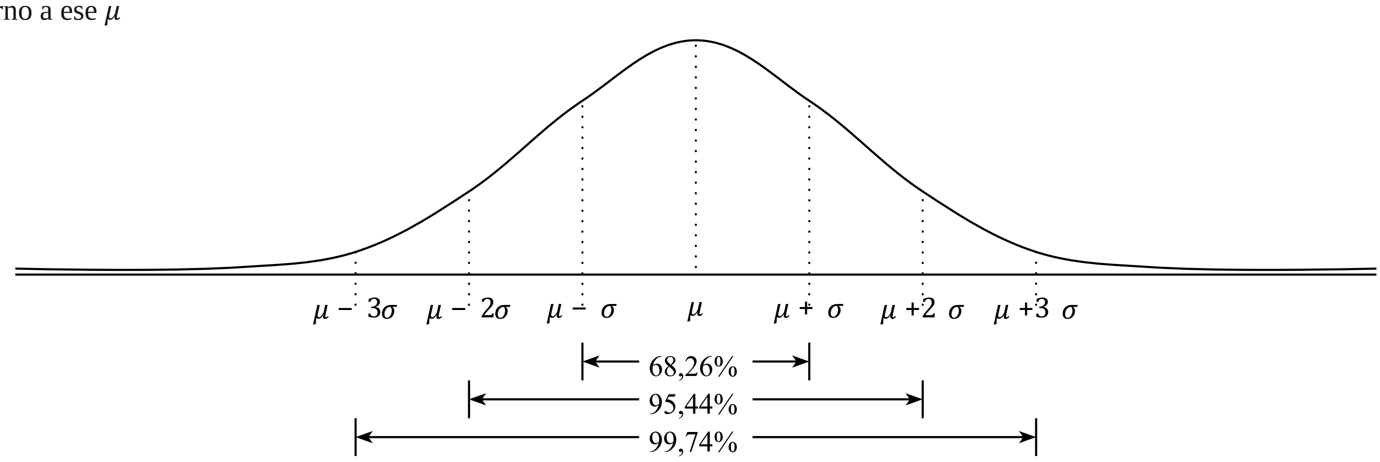


El área bajo la curva es 1, la probabilidad total, es El área destacada es la probabilidad de ocurrencia de decir, que ocurra todo los fenómenos en ese segmento, si $x_1 < x_2$, entonces esa área será $F(x_2) - F(x_1)$

De esta función y su gráfica se tiene lo siguiente μ es la esperanza o media aritmética, σ es la desviación estándar. El valor o punto más alto se alcanza en $x = \mu$ y es además simétrica respecto a la recta $x = \mu$

La curva es asintótica con el eje x en las direcciones $-\infty$ y $+\infty$

Mientras menor es σ, más alta es la curva en la recta $x = \mu$ y en consecuencia, ma´s se concentran los valores en torno a ese μ



En medicina, considerando la experiencia de años y sus respectivos registros, se han elaborado tablas para controlar los diferentes exámenes que se deben realizar los pacientes, allí se considera la media o esperanza μ y dos desviaciones estándar σ a ambos lados de dicha media; si el resultado cae entre estos márgenes, la persona se considera sana, es decir, el 95,44% de las personas es considerada libre de alguna patología, según las leyes estadísticas y sobre todo de la distribución normal.

Para obtener los valores, relativamente, exactos bajo la curva de la función de densidad normal, es necesario el cálculo integral, cosa que no nos corresponde estudiar en enseñanza media, ya que se trata de

$$F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx$$

Para obtener la probabilidad de que un valor se encuentre entre x_1 y x_2 se utiliza

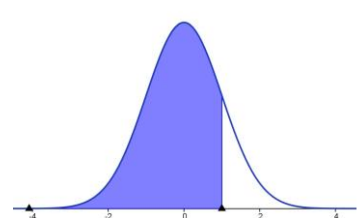
$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx = F(x_2) - F(x_1)$$

Para una persona sana y menor de 21 años el nivel medio de colesterol (en mg por dl) es de 160, y una desviación de 10, un nivel menor que 140 o mayor que 180 se considera fuera del rango de normalidad y podr´ıa tener aparejada alguna anomalía, aunque no necesariamente, pues el 4,6% de las personas sanas están fuera de los márgenes considerados normales.

Ejemplo: Supongamos que la altura promedio del ciudadano chileno mayor de 18 an˜os es de 165 cm. y que se distribuye normalmente con una desviación estándar de 8 cm. Entonces podemos estimar que un 68,26% de ellos tiene una estatura de entre 157 y 173 centímetros, es decir, el intervalo $[\mu - \sigma, \mu + \sigma]$, que un 95,44% estará entre las estaturas de 149 y 181 centímetros, $[\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma]$ y casi el 100% medirá´ entre 141 y 189 centímetros $[\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma]$.

En tiempos no muy lejanos, en ausencia de las modernas máquinas de cálculo (Calculadoras científicas), se recurrió a ciertas tablas, las que se denominaron tablas de distribución normal tipificada, la notación para la distribución normal es $N(\mu, \sigma)$, para dicha tabla se considera $N(0, 1)$, a los valores normalizados, es decir, obtenidos por esa distribución se les denomina puntajes Z2

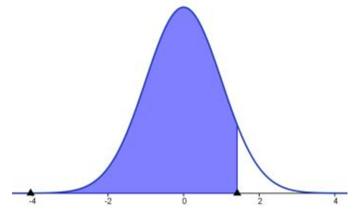
La tabla indica el a´rea bajo la curva desde 0 hasta x hacia la derecha, para calcular el a´rea para valores de x negativos hay que aprovechar la simetr´ıa de la curva para poder determinarla.



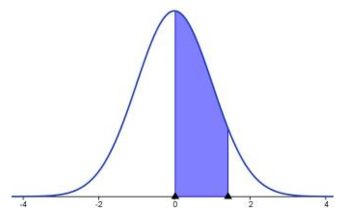
x	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5	0,50399	0,50798	0,51197	0,51595	0,51994	0,52392	0,52790	0,53188	0,53586
0,1	0,53983	0,54380	0,54776	0,55172	0,55567	0,55962	0,56356	0,56749	0,57142	0,57535
0,2	0,57926	0,58317	0,58706	0,59095	0,59483	0,59871	0,60257	0,60642	0,61026	0,61409
0,3	0,61791	0,62172	0,62552	0,62930	0,63307	0,63683	0,64058	0,64431	0,64803	0,65173
0,4	0,65542	0,65910	0,66276	0,66640	0,67003	0,67364	0,67724	0,68082	0,68439	0,68793
0,5	0,69146	0,69497	0,69847	0,70194	0,70540	0,70884	0,71226	0,71566	0,71904	0,72240
0,6	0,72575	0,72907	0,73237	0,73565	0,73891	0,74215	0,74537	0,74857	0,75175	0,75490
0,7	0,75804	0,76115	0,76424	0,76730	0,77035	0,77337	0,77637	0,77935	0,78230	0,78524
0,8	0,78814	0,79103	0,79389	0,79673	0,79955	0,80234	0,80511	0,80785	0,81057	0,81237
0,9	0,81594	0,81859	0,82121	0,82381	0,82639	0,82894	0,83147	0,83398	0,83646	0,83891
1,0	0,84134	0,84375	0,84614	0,84849	0,85083	0,85314	0,85543	0,85796	0,85993	0,86214
1,1	0,86433	0,86650	0,86864	0,87076	0,87286	0,87493	0,87698	0,87900	0,88100	0,88298
1,2	0,88493	0,88686	0,88877	0,89065	0,89251	0,89435	0,89617	0,89796	0,89973	0,90147
1,3	0,90320	0,90490	0,90658	0,90824	0,90988	0,91149	0,91308	0,91466	0,91621	0,91774
1,4	0,91924	0,92073	0,92220	0,92364	0,92507	0,92647	0,92785	0,92922	0,93056	0,93189
1,5	0,93319	0,93448	0,93574	0,93699	0,93822	0,93943	0,94062	0,94179	0,94295	0,94408
1,6	0,94520	0,94630	0,94738	0,94845	0,94950	0,95053	0,95154	0,95254	0,95352	0,95449
1,7	0,95543	0,95637	0,95728	0,95818	0,95907	0,95994	0,96080	0,96164	0,96246	0,96327
1,8	0,96407	0,96485	0,96562	0,96638	0,96712	0,96784	0,96856	0,96926	0,96995	0,97062
1,9	0,97128	0,97193	0,97257	0,97320	0,97381	0,97441	0,97500	0,97558	0,97615	0,97670
2,0	0,97725	0,97778	0,97831	0,97882	0,97932	0,97982	0,98030	0,98077	0,98124	0,98169
2,1	0,98214	0,98257	0,98300	0,98342	0,98382	0,98422	0,98461	0,98500	0,98537	0,98574
2,2	0,98610	0,98645	0,98679	0,9871	0,98745	0,98778	0,98809	0,98840	0,98870	0,98899
2,3	0,98928	0,98956	0,98983	0,9898	0,99036	0,99061	0,99086	0,99111	0,99134	0,99158
2,4	0,99180	0,99202	0,99224	0,992	0,99266	0,99286	0,99305	0,99324	0,99343	0,99361
2,5	0,99379	0,99396	0,99413	0,99420	0,99446	0,99461	0,99477	0,99492	0,99506	0,99520
2,6	0,99534	0,99547	0,99560	0,99570	0,99585	0,99598	0,99609	0,99621	0,99632	0,99643
2,7	0,99653	0,99664	0,99674	0,99680	0,99693	0,99702	0,99711	0,99720	0,99728	0,99736
2,8	0,99744	0,99752	0,99760	0,99766	0,99774	0,99781	0,99788	0,99795	0,99801	0,99807
2,9	0,99813	0,99818	0,99825	0,99830	0,99836	0,99841	0,99846	0,99851	0,99856	0,99861
3,0	0,99865	0,99869	0,99874	0,99878	0,99882	0,99886	0,99889	0,99893	0,99896	0,99900
3,1	0,99903	0,99906	0,99910	0,99913	0,99916	0,99918	0,99921	0,99924	0,99926	0,99929
3,2	0,99931	0,99934	0,99936	0,99937	0,99940	0,99942	0,99944	0,99946	0,99948	0,99950
3,3	0,99952	0,99953	0,99955	0,99956	0,99958	0,99960	0,99961	0,99962	0,99964	0,99965
3,4	0,99966	0,99968	0,99969	0,99970	0,99971	0,99972	0,99973	0,99974	0,99975	0,99976
3,5	0,99977	0,99978	0,99978	0,99979	0,99980	0,99981	0,99981	0,99982	0,99983	0,99983
3,6	0,99984	0,99985	0,99985	0,99986	0,99986	0,99987	0,99987	0,99988	0,99988	0,99989
3,7	0,99989	0,99990	0,99990	0,99990	0,99991	0,99991	0,99992	0,99992	0,99992	0,99992
3,8	0,99993	0,99993	0,99993	0,99994	0,99994	0,99995	0,99994	0,99995	0,99995	0,99995
3,9	0,99995	0,99995	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99997	0,99997
4,0	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99998	0,99998	0,99998	0,99998

Veamos seis ejemplos de cómo utilizar esta tabla: k es un número que representa una fracción de σ

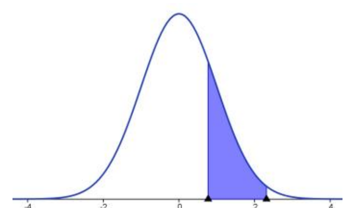
1. Caso 1 $k > 0$ $p(Z \leq k)$ ver el valor directamente de la tabla



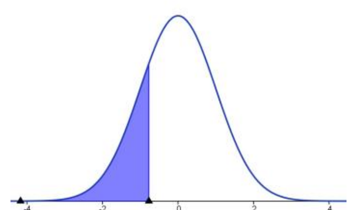
2. Caso 2 $k > 0$ $p(0 \leq Z \leq k)$ para este tipo de casos al valor de $p(Z \leq k)$, restar 0,5



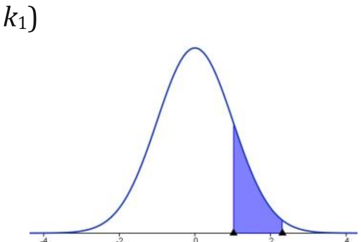
3. Caso 3 $k > 0$ $p(Z \geq k)$ para este tipo de casos restar a 1 el valor de $p(Z \leq k)$



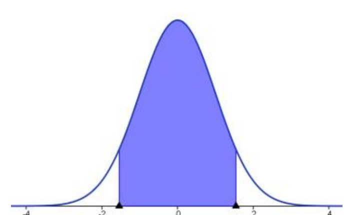
4. Caso 4 $k > 0$ $p(Z \leq -k)$ para este caso es necesario considerar su simétrico $p(Z \geq k)$



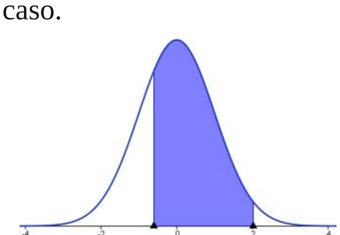
5. Caso 5 $k_1 > 0 \wedge k_1 < k_2$ $p(k_1 \leq Z \leq k_2)$ aquí hay que considerar $p(Z \leq k_2) - p(Z \leq k_1)$



6. Caso 6 $k > 0$ $p(-k \leq Z \leq k)$ debido a la simetría esto quedara´ $2p(Z \leq k) - 1$



7. Caso 7 $k_1 < 0 \wedge k_2 > 0$ $p(k_1 \leq Z \leq k_2)$ razone usted como se puede desarrollar este caso.

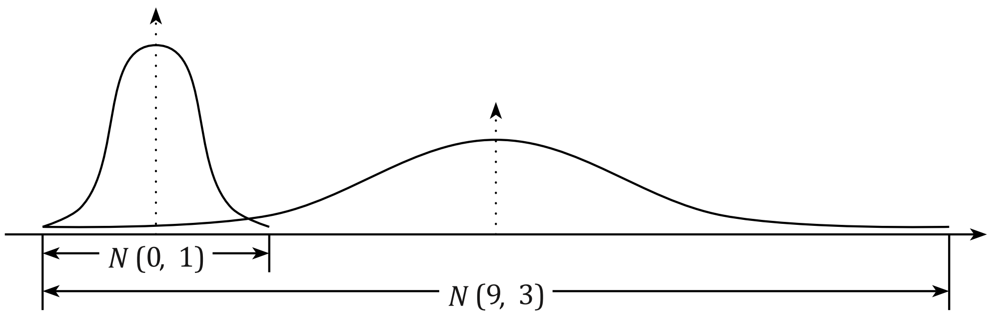


¿Cómo proceder cuando la verdad es que casi nunca ocurre $N(0, 1)$?

l.arancibia.mat@institutonacional.cl

Al proceso lo llamaremos tipificación de una variable $N(\mu, \sigma)$ y el puntaje tipificado será´ $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$. Entonces para cualquiera sea la distribución normal $N(\mu, \sigma)$ vamos a tener:

$$p(X \le k) = p\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{k-\mu}{\sigma}\right) = p\left(Z \le \frac{k-\mu}{\sigma}\right)$$



¿Que´ probabilidad hay que un valor sea mayor que 9 y menor que 12 para $N(9, 3)$?

Haciendo $Z = \frac{X-9}{3}$ observamos que $Z = 1$ se corresponde con $X = 9$ y haciendo la analogía correspondiente, tenemos que $Z = 0$ se corresponde con $X = 9$

Por lo tanto la probabilidad de que un valor este´ entre 9 y 12 en $N(9, 3)$ es la misma que la probabilidad este´ entre 0 y 1 en $N(0, 1)$.

Ejemplo: Del ejemplo en que se considera que la altura promedio del ciudadano chileno mayor de 18 años es de 165 cm. y que se distribuye normalmente con una desviación estándar de 8 cm. Entonces determine las siguientes probabilidades

1. De que un ciudadano se encuentre entre los 145 y 157 centímetros de altura

2. De que un ciudadano se encuentre sobre los 178 centímetros de altura.

3. De que un ciudadano mida menos de 142 centímetros de altura.

4. Si los mayores de 18 años son aproximadamente 12.000.000 ¿Cuántos son los ciudadanos que están cumpliendo los puntos anteriores?

Problema: Consideremos los puntajes corregidos de la PSU ingreso 2015, entregados anteriormente, si vemos la equivalencia de $\bar{x} = 500$ y $\sigma = 110$, en la notación normal $N(500, 110)$ para el puntaje estándar Z, deberíamos considerar $N(23, 21)$, la que obviamente debe ser un monstruo horrible. Y si se quiere usar para evaluar la reforma educativa, obviamente esta esta´ reprobada.
Anteriormente el puntaje corregido se obtenía de considerar el número de respuestas correctas y cada cuatro incorrectas se restaba una correcta, con esto debería ser $N(12{,}21)$ con un total de 70 preguntas y puntajes entre -18 y 75 Haga usted un análisis de casos. Por ejemplo ¿cuál es la probabilidad de que un estudiante responda más de 35 preguntas de modo correcto?

¿Cuál es la probabilidad de que un estudiante obtenga más de 700 puntos en la PSU de matemática?
¿Con que´ número de respuestas correctas se está´ dentro del 10% de mejor rendimiento en la PSU de matemática?

1. Si $X \sim N(\mu,\sigma^2)$, ¿cuál de las siguientes alternativas corresponde a la probabilidad de seleccionar al 95,4% del total poblacional que se modelan mediante la distribución de la variable aleatoria X?

   A) $P(\mu - \frac{1}{2}\sigma < x < \mu + \frac{1}{2}\sigma)$

l.arancibia.mat@institutonacional.cl

B) $P(\mu - \sigma < x < \mu + \sigma)$ C) $P(\mu$

$- 2\sigma < x < \mu + 2\sigma)$

D) $P(\mu - 3\sigma < x < \mu + 3\sigma)$ E)

$P(\mu - 4\sigma < x < 4\sigma)$

2. La muestra $\{a, b\}$ tiene varianza σ^2. ¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

I) Si $\sigma^2 = 0$, entonces $a = b$

II) La muestra $\{a - X, b - X\}$ tiene varianza σ^2 para cualquier valor de X III)

$\sigma^2 > \sigma$

A) Solo I
B) Solo I y II
C) Solo I y III
D) Solo II y III
E) I, II y III

3. En un pueblo de cierta cantidad de habitantes, la probabilidad de escoger al azar una mujer es 0,6 y de ellas un40% tiene hijos. Además los hombres son 500. ¿Cuál es la probabilidad de elegir al azar una mujer sin hijos?

A) 16%
B) 24%
C) 36%
D) 40%
E) 60%

4. Sabiendo que Z es una variable aleatoria con distribución normal estándar, tal que $P(Z \leq 3) = 0{,}9986$, ¿cua´l2 es la probabilidad de que una variable aleatoria X de distribución normal de media aritmética μ y varianza σ, verifique que $|X - \mu| \leq 3$?

A) 0
B) 0,3328
C) 0,4993
D) 0,9972
E) 1

5. ¿Cuál es el nivel de confianza de un intervalo para la media poblacional μ de una muestra normal de varianza y tamaño poblacional conocidos, donde $Z = 1{,}64$?

A) 95%
B) 90%
C) 85%
D) 80%
E) 75%

6. Si $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ tal que $P(\mu - n\sigma \leq X \leq \mu + n\sigma) = 0{,}9972$, siendo n un número natural. Sea Z una variable aleatoria normal estándar, entonces el valor de $P(Z \leq n)$ es

A) 0,9986
B) 0,8155
C) 0,9972

l.arancibia.mat@institutonacional.cl

D) 0,1359

E) No se puede determinar

7. En el colegio se desea saber cuántas horas dedican al estudio los 2.200 estudiantes de la jornada de la mañana en este año 2019. El año pasado se consideró´ que un universo similar se calculó´ una desviación estándar de 1,5 horas. Se considera entrevistar una muestra representativa de entre esos 2.200 estudiantes y se aceptara´ un error máximo de 0,5 horas. ¿Cuantos deben ser los alumnos encuestados como mínimo para que el nivel de confianza sea de 0,99, asumiendo que los datos se distribuyen normalmente?

A) 100

B) 80

C) 60

D) 40

E) 20

8. Si $X \sim N(0, 1)$, entonces ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

I. La probabilidad $P(X < 0)$ es 50%

II. $P(X > 2{,}1) = 1 - P(X < 2{,}1)$

III. $P(X = 0{,}5) = 0$

A) Solo IB) Solo II

C) Solo I y II

D) Solo I y III

E) I, II y III

9. En una distribución $N(90, 15)$, ¿cuál(es) de las siguientes proposiciones es (son) verdadera(s)?

I. $P(90 < x < 105) = 0{,}3413$

II. $P(60 < x < 90) = 0{,}477$

III. $P(105 < x < 120) = 0{,}1359$

A) Solo I

B) Solo I y II

C) Solo II y III

D) I, II y III

E) Ninguna de ellas

10. Si $X \sim N(0, 1)$, entonces es correcto:

A) $P(X \leq 2) = 0{,}9773$

B) $P(X \leq -2) = 0{,}9773$

C) $P(X \geq 2) = 0{,}0228$

D) $P(X \geq -2) = 0{,}9773$ E) $P(-2 \leq X \leq 2) = 0{,}0456$

11. Un arquero (lanzador de flechas) tiene un record de 75% de aciertos en sus tiros. Si en una competencia lanza25 tiros, ¿cuál es la probabilidad que tenga más de 10 aciertos?

A) 0.9998
B) 1-0,06
C) 0,002
D) 0,7E) 0,5× 25

12. La longitud en centímetros de los lápices que fabrica una cierta empresa esta´ dado por $X \sim N(8, 0{,}2)$. ¿Cuál es la probabilidad que un lápiz mida menos de 8 cm?

A) 1
B) 0,2
C) 0,5
D) 0,8
E) 8

13. Un examen con 20 preguntas de selección múltiple, cada una con tres opciones y solo una verdadera. Si la variable aleatoria es *cantidad de respuestas correctas respondidas al azar*. ¿Que´ distribución corresponde a esta situación?

A) $N(20, \frac{1}{3})$
B) $N(20, 3)$
C) $N(\frac{20}{3}, \frac{1}{3})$
D) $B(20, \frac{1}{3})$E)
$B(20, 3)$

14. Sea X una variable aleatoria continua, tal que $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, donde se sabe que $P(\mu - \sigma \leq x \leq \mu - \sigma) = 0,6826$ y $P(\mu - 2\sigma \leq x \leq \mu + 2\sigma) = 0,9545$, ¿cuál es el valor de $P(\mu + \sigma \leq x \leq \mu + 2\sigma)$?

A) 0,13595
B) 0,2719
C) 0,86405
D) 0,81855
E) Ninguno de los anteriores

15. Si $X \sim N(\mu, \sigma^2) = N(1, 4)$, con cuál de las siguientes relaciones se tendrá´ $Y \sim N(0, 1)$?

A) $Y = \frac{X-1}{\sqrt{2}}$
B) $Y = \frac{X-1}{2}$
C) $Y = \frac{X-1}{4}$
D) $Y = \frac{X}{4}$
E) $Y = \frac{X}{2}$

16. Sea X una variable aleatoria tal que $X \sim B(40; 0{,}5)$. Si la distribución de X se hace por aproximación a una distribución normal con esperanza μ y desviación estándar σ, entonces esta queda dada por:

A) $N(20,5;\ \sqrt{10})$
B) $N(20; 10)$
C) $N(20; 0{,}5)$

l.arancibia.mat@institutonacional.cl

D) $N(20{,}5;\ 0{,}5)$
E) $N(20;\ \sqrt{10})$

17. En un curso de básica la estatura, en centímetros, de los estudiantes se modela a través de una distribución normal $N(150;\ 100)$. Se selecciona al azar un estudiante y se sabe que la probabilidad que mida a lo menos Q centímetros es de 0,977, ¿cuál es el valor de Q?

A) 170 cm
B) 160 cm
C) 150 cm
D) 140 cm
E) Ninguno de los anteriores