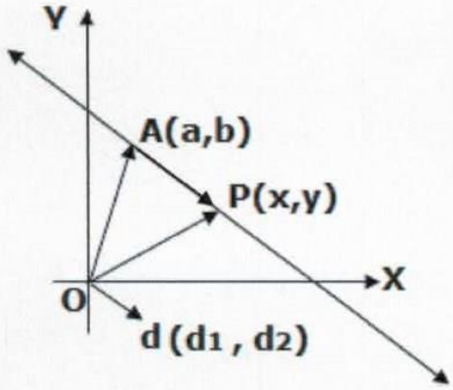
Instituto Nacional
General José M. Carrera V.
Departamento de Matemática
2019

RECTAS Y PLANOS II

Ecuación vectorial de la recta en el plano.

En general se puede determinar la ecuación vectorial de una recta si se conoce un punto de ella, A(a,b), y un vector que indique la dirección de la recta, $\vec{d} = \langle d_1,\ d_2 \rangle$, que llamaremos vector director.



La ecuación de la recta corresponde a encontrar al vector $\overrightarrow{OP}$.
En el plano observe que $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP}$, además tenga presente que $\overrightarrow{AP}$ corresponde a la ponderación del vector director por un número real cualquiera, por ejemplo, λ , es decir:

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \lambda\, \vec{d}$$

A partir de esta ecuación, y con $\overrightarrow{OP} = \langle x, y \rangle$, $\overrightarrow{OA} = \langle a, b \rangle$ $y\ \vec{d} = \langle d_1, d_2 \rangle$, se tiene:

Ecuación vectorial de la recta $\langle x, y \rangle = \langle a, b \rangle + \lambda \langle d_1, d_2 \rangle$

Ecuación paramétrica $\begin{cases} x = a + \lambda\, d_1 \\ y = b + \lambda\, d_2 \end{cases}$

Ecuación Continua $\frac{x-a}{d_1} = \frac{y-b}{d_2}$

Ejemplos :

1) Escribir la forma general de la recta que pasa por el punto $A(-1,8)$ y que tiene como vector director a $\langle 2,7 \rangle$

   Ecuación vectorial : $\langle x, y \rangle = \langle -1,8 \rangle + \lambda \langle 2,7 \rangle$

   Ecuación continua : $\frac{x+1}{2} = \frac{y-8}{7}$

   Ecuación general : $7x + 7 = 2y - 16$, ordenando $7x - 2y + 23 = 0$

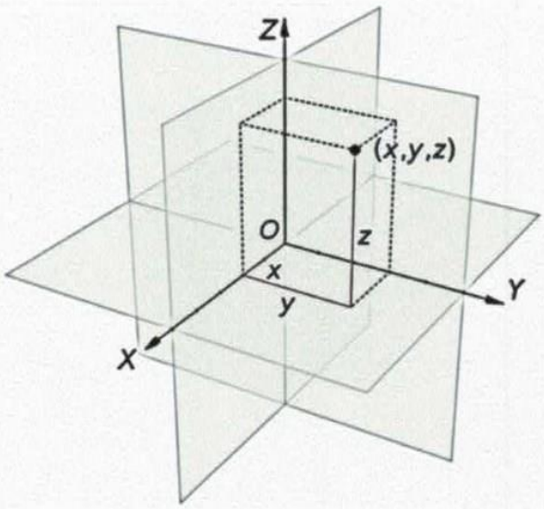
2) Hallar un vector director de la recta $3x - 2y + 5 = 0$

   Despejando $y = \frac{3x+5}{2}$, se tiene que la pendiente es $m = \frac{3}{2}$, luego un vector director puede ser $\vec{d} = \langle 2,3 \rangle$ o $\vec{d} = \langle 4,6 \rangle$, etc.

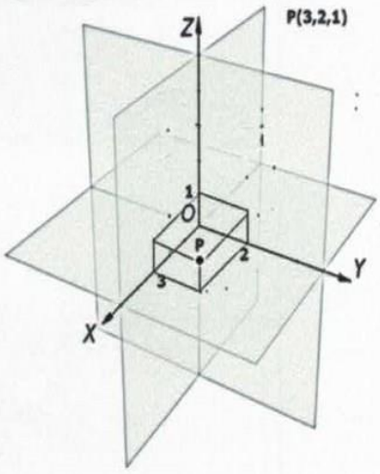
Sistema cartesiano tridimensional

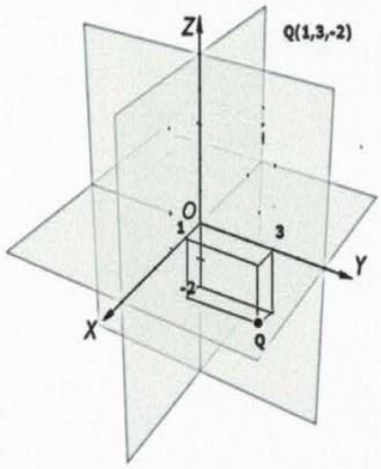
Está conformado por tres planos perpendiculares entre si, los cuales se intersectan formando los ejes coordenados; que se denominan OX, OY y OZ.

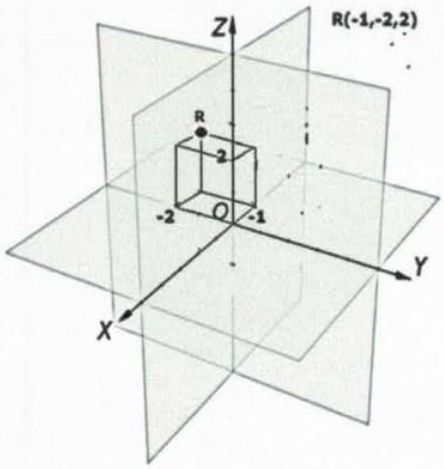
Cada punto está conformado por un trío ordenado, es decir de coordenadas (x,y,z). La coordenada x corresponde al desplazamiento en el eje de abscisas, la coordenada y al desplazamiento en el eje de ordenadas y la coordenada z al desplazamiento en el eje de cotas.



Ejemplos





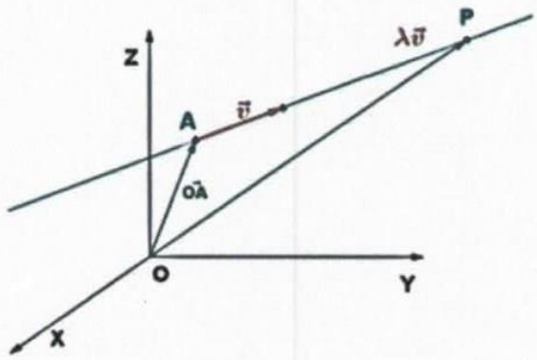


Distancia entre dos puntos

La distancia entre los puntos $A(x_1,y_1,z_1)$ y $B(x_2,y_2,z_2)$ se obtiene con la expresión $D_{AB}=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}$ y que corresponde al módulo del vector $\overrightarrow{AB}$.

Ecuación vectorial de la recta

Sea la recta L que pasa por el punto $A(x_0, y_0, z_0)$ con vector de dirección $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$. Si $P(x, y, z)$ es un punto cualquiera de la recta, existe un número real λ tal que, $\overrightarrow{AP} = \lambda\vec{v}$ entonces $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \lambda\vec{v}$, es conocida como ***ecuación vectorial de la recta***



Usando las coordenadas del vector de dirección, la ecuación vectorial de la recta queda expresada como:

$$\boxed{(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \lambda(v_1, v_2, v_3) \quad \lambda \in \mathbb{R}}$$

Ecuaciones Paramétricas de la recta

A partir de la igualdad: $(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \lambda(v_1, v_2, v_3)$ tenemos que:

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 + \lambda v_1 \\ y &= y_0 + \lambda v_2 \\ z &= z_0 + \lambda v_3 \end{aligned}\right\}$$ conocidas como ***ecuaciones paramétricas*** de la recta

Ecuación Continua

Si despejamos λ de las ecuaciones paramétricas e igualamos, se obtiene la ecuación continua.

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 + \lambda v_1 \\ y &= y_0 + \lambda v_2 \\ z &= z_0 + \lambda v_3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} \lambda &= \frac{x - x_0}{v_1} \\ \lambda &= \frac{y - y_0}{v_2} \\ \lambda &= \frac{z - z_0}{v_3} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{\frac{x - x_0}{v_1} = \frac{y - y_0}{v_2} = \frac{z - z_0}{v_3}}$$

Ecuación continua

Ejemplo: Dados los puntos A(1,0,2) y B(3,2,1), obtener:

1) La distancia entre A y B

$D_{AB}=\sqrt{(1-3)^2+(0-2)^2+(2-1)^2}=\sqrt{4+4+1}=\sqrt{9}=3$

2) La ecuación vectorial de la recta que pasa por A y B

Usaremos $\overrightarrow{AB}$ como vector director y $\overrightarrow{OA}$ como vector posición.
$\overrightarrow{AB}$ =(3-1,2-0,1-2)=(2,2,-1)
Entonces la ecuación vectorial de la recta es:
(x,y,z)=(1,0,2)+ λ(2,2,-1)

3) Las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por A y B

$$\left.\begin{array}{l} x=1+2\lambda \\ y=0+2\lambda \\ z=2-\lambda \end{array}\right\}$$

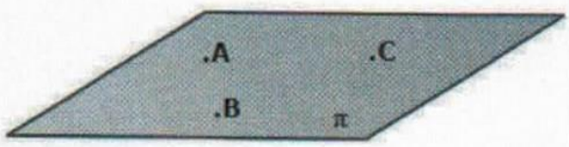
4) La ecuación continua de la recta que pasa por A y B

$$\left.\begin{array}{l} x=1+2\lambda \\ y=0+2\lambda \\ z=2-\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \lambda=\dfrac{x-1}{2} \\ \lambda=\dfrac{y-0}{2} \\ \lambda=\dfrac{z-2}{-1} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{x-1}{2}=\frac{y-0}{2}=\frac{z-2}{-1}$$

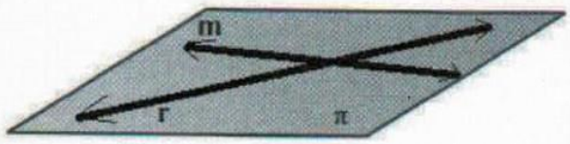
Elementos Fundamentales

Definen un único Plano (al cual pertenecen):

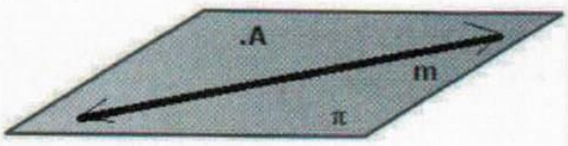
Tres puntos No colineales



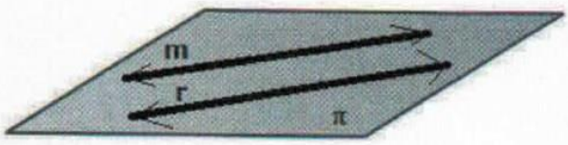
Dos rectas secantes



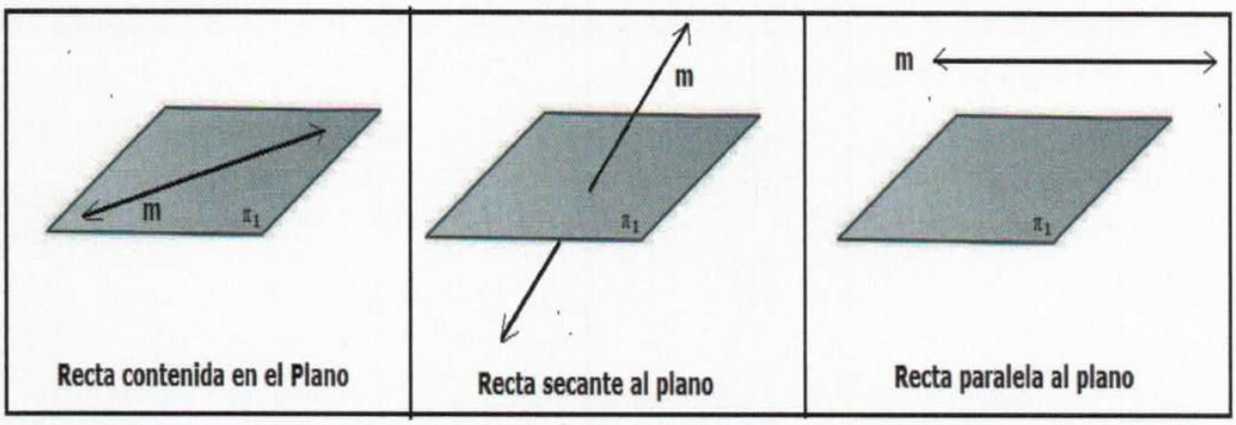
Una recta y un punto exterior a ella



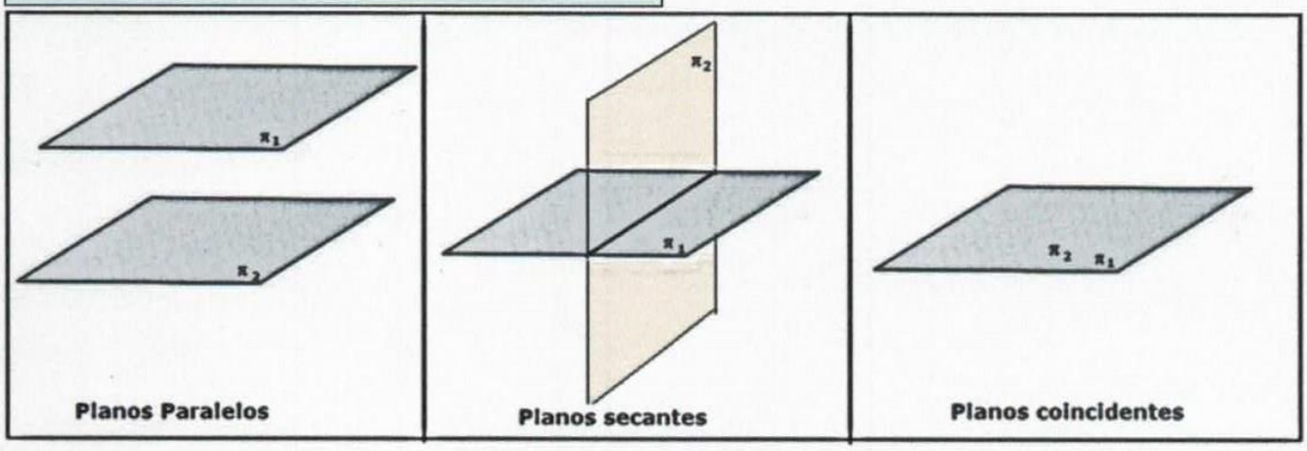
Dos rectas paralelas



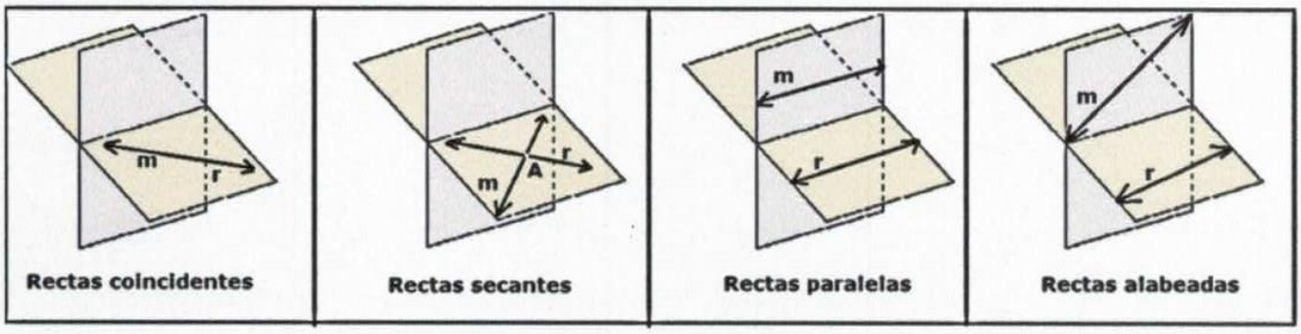
Posiciones Relativas entre una Recta y un Plano



Posiciones relativas entre dos Planos



Posiciones relativas entre dos rectas en el Espacio



TEST

1) La ecuación vectorial (x, y) = (2, 1) + λ(1, 1) transformada a ecuación cartesiana, resulta:

A) y = x – 1
B) y = x + 1
C) y = 2x + 1
D) y = 2x + 3
E) No se puede determinar

2) Considere los vectores $\vec{a} = (1,2)$; $\vec{b} = \left(-1, \frac{1}{2}\right)$; $\vec{c} = (6,-3)$ y $\vec{d} = \left(\frac{1}{3}, \frac{-1}{6}\right)$
¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

I. $\vec{a}$ y $\vec{c}$ **son vectores paralelos.**
II. $\vec{a}$ y $\vec{b}$ **son vectores perpendiculares.**
III. $\vec{c}$ y $\vec{d}$ **son vectores paralelos.**

A) Sólo I
B) Sólo II
C) Sólo III
D) Sólo II y III
E) I, II y III

3) Considere los vectores $\vec{p}$ **(6, –4),** $\vec{q}$**(2, 9),** $\vec{r}$ **(5, –2) y** $\vec{s}$ **(3, 7).**
¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

I. El vector ($\vec{p} + \vec{r}$ **) se encuentra en el segundo cuadrante.**
II. El vector ($\vec{q} - 2\,\vec{p}$ **) se encuentra en el tercer cuadrante.**
III. $\vec{p} + \vec{q} = \vec{r} + \vec{s}$

A) Solo I
B) Solo I y II
C) Solo I y III
D) Solo II y III
E) I, II y III

4) Se tienen dos rectas en el plano, L_1 y L_2, cuyas ecuaciones son
$L_1: (x,y) = t(-3, a+1) + (1,b)$ **y** $L_2: (x,y) = s\left(\frac{1}{2}, b-1\right) + (1,a)$, **con** s y t **números reales. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es siempre verdadera? (demre 2017)**

A) Si $a + 1 = b - 1$**, entonces L_1 es paralela a L_2.**
B) Si ab = -1, entonces L_1 es perpendicular a L_2
C) L_1 intersecta al eje y en b.
D) Si $(a+1)(b-1) = \frac{3}{2}$**, entonces L_1 es perpendicular a L_2.**
E) El punto $\left(\frac{1}{2}, b-1\right)$ **pertenece a la recta L_2.**

5) En las siguientes afirmaciones la única falsa es:

A) En el espacio puede haber tres planos que se intersectan en un punto.
B) Dos rectas paralelas definen un plano.
C) Una recta que es perpendicular a un plano, es paralela a alguna recta de ese plano.
D) Si una recta corta a un plano corta a todos los planos paralelos a él.
E) Con tres puntos que no pertenecen a una misma recta se genera un plano.

6) El triángulo ABC de la figura, tiene sus vértices ubicados en los puntos A(1,0,0); B(0,1,0) y C(0,01). Su área y su perímetro miden respectivamente.

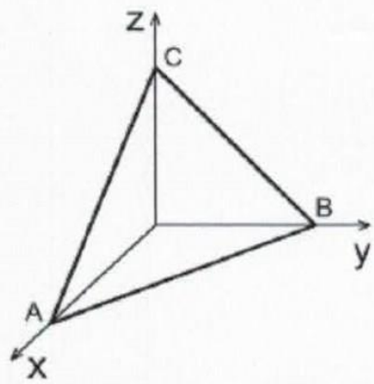
A) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ y $3\sqrt{2}$

B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ y $\sqrt{2}$

C) $\sqrt{3}$ y $3\sqrt{2}$

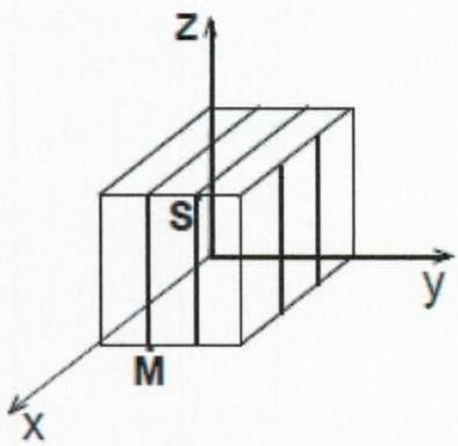
D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ y $3\sqrt{2}$

E) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ y $\sqrt{2}$



7) En el cubo de la figura, la longitud de la arista es 3 y un vértice está en el origen (0,0,0). Si el punto M tiene coordenadas (3,1,0) y cada arista se ha dividido en tres partes iguales, ¿cuáles son las coordenadas del punto S?

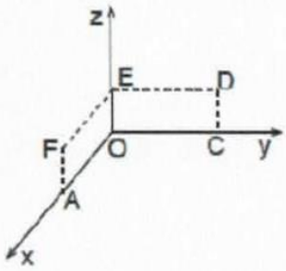
A) (2,3,3)
B) (3,3,3)
C) (3,3,2)
D) (2,2,3)
E) (3,2,3)



8) En la figura, las coordenadas de los puntos D y F son (0,5,2) y (3,0,2) respectivamente. ¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)

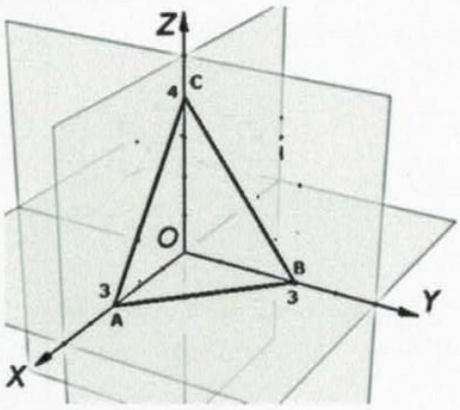
I) El perímetro del rectángulo AOEF es 10 unidades.
II) El área del rectángulo OCDE es 10 unidades cuadradas.
III) El segmento AC mide $\sqrt{34}$ unidades.

A) Sólo I
B) Sólo II
C) Sólo I y II
D) Sólo I y III
E) I, II y III



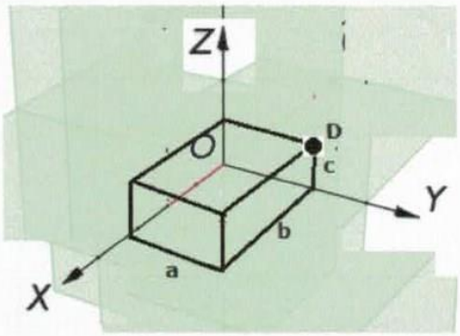
9) El triángulo ABC de la figura, se sitúa en el sistema cartesiano tridimensional. ¿Cuál es el perímetro de este triángulo?

A) $3\sqrt{2}$
B) $10+3\sqrt{2}$
C) $10+\sqrt{2}$
D) $5+3\sqrt{2}$
E) Ninguna de las anteriores



10) El paralelepípedo recto se sitúa en un sistema cartesiano tridimensional tal como lo ilustra la figura. ¿Cuáles son las coordenadas del punto D?

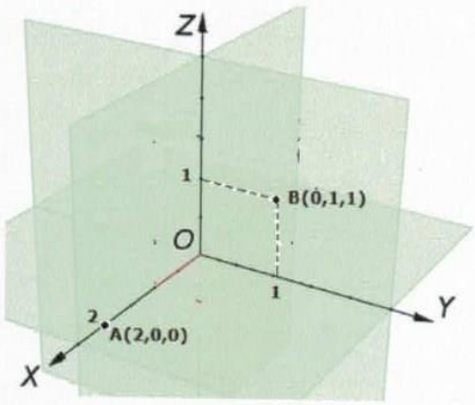
A) (a,b,c)
B) (0,a,c)
C) (a,0,c)
D) (b,0,c)
E) (0,b,c)



11) Un cubo de arista 2 se sitúa en el sistema cartesiano tridimensional. Uno de sus vértices está ubicado en el origen (0,0,0). Si las coordenadas de otro vértice son (0,0,c) ¿Cuál es el mayor valor que puede alcanzar c?

A) $\sqrt{12}$
B) $\sqrt{8}$
C) $\sqrt{2}$
D) 0
E) 2

12) Según la información de la figura, ¿Cuál es la distancia entre A y B?



A) 2
B) 3
C) $\sqrt{5}$
D) $\sqrt{6}$
E) $\sqrt{5}+1$

13) Se puede determinar el volumen de un cubo situado en el sistema cartesiano tridimensional, si:

(1) Dos de sus vértices tienen coordenadas (0,0,0) y (8,0,0) respectivamente.

(2) La distancia entre dos de sus vértices que no pertenecen a la misma arista, es 8.

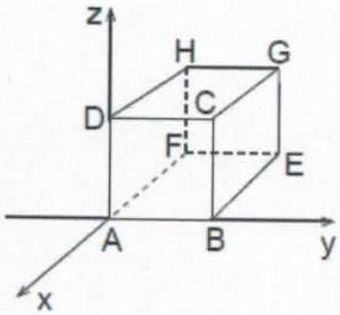
A) (1) por sí sola
B) (2) por sí sola
C) Ambas juntas, (1) y (2)
D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
E) Se requiere información adicional

14) El triángulo equilátero ABC tiene por vértices los puntos A(a,0,0), B(0,b,0) y C(0,0,c) ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es(son) verdaderas?

I) $abc \neq 0$
II) Si $a > 0$**, el valor mínimo de a+b+c es –a**
III)Si $c = \sqrt{2}$**, el perímetro del triángulo ABC es 6**

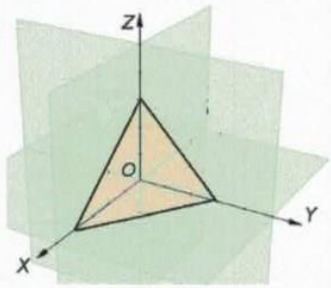
A) Sólo I
B) Sólo II
C) Sólo III
D) Sólo I y III
E) I, II y III

15) En la figura se muestra un cubo de arista 2. Si el vértice A está en el punto (0, 0, 0), la arista AD está en el eje z y el vértice B está en el eje y, entonces las coordenadas del vértice E son:



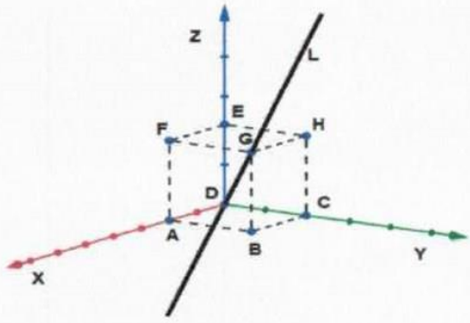
A) (0, 2, 0)
B) (0, -2, 0)
C) (2, -2, 0)
D) (-2, 2, 0)
E) (-2, 0, 2)

16) El triángulo de la figura, pertenece al plano $\pi : \frac{x}{3} + \frac{y}{3} + \frac{z}{5} = 1$ ¿Cuál es el perímetro del triángulo?



A) $3\sqrt{2}$
B) $2\sqrt{34} + 3\sqrt{2}$
C) $4\sqrt{3}$
D) $2\left(\sqrt{34} + \sqrt{3}\right)$
E) $\sqrt{34}$

17) En la figura adjunta, el cubo ABCDEFGH tiene los vértices A, C, D y E sobre los ejes coordenados. ¿Cuál es la ecuación de la recta L, que pasa por los puntos D y G?



A) (x,y,z)=(1,1,1)+k·(0,1,1)
B) (x,y,z)=(-1,-1,-1)+r·(-2,-2,-2)
C) (x,y,z)=(0,0,0)+s·(1,0,1)
D) (x,y,z)=(0,0,0)+t·(0,1,1)
E) (x,y,z)=(1,1,1)+m·(0,0,0)

18) De las siguientes ecuaciones:

I) (x,y,z)=(1,1,1)+k·(1,1,1)
II) (x,y,z)=(0,0,0)+(t,t+1,t-1)
III) $\frac{x}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{3}$

¿cuál(es) corresponde(n) a recta(s) que pasa(n) por el origen?

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo III
D) Solo I y II
E) Solo I y III

19) Se puede determinar si la recta L pasa por el origen cuando:

(1) Su ecuación vectorial es: (x,y,z)=k·(a,b,c)

(2) El vector director es múltiplo del vector posición.

A) (1) por sí sola
B) (2) por sí sola
C) Ambas juntas, (1) y (2)
D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
E) Se requiere información adicional

20) ¿Cuál de los siguientes puntos NO pertenece a la recta L, cuya ecuación continua es: $\frac{x-2}{1}=\frac{y-4}{2}=\frac{z-6}{3}$?

A) (-1,-2,-3)
B) (1,2,3)
C) (-2,-4,-6)
D) (3,6,9)
E) (0,1,2)

21) Sean las rectas L_1, y L_2, cuyas ecuaciones vectoriales son:
L_1: (x, y, x)=(0,-2,0)+t·(0,2,1) , L_2:(x, y, z)=(0,2,0)+r·(0,-2,1)
¿En qué punto se intersectan L_1, y L_2?

A) (0,-2,0)
B) (0,2, 0)
C) (0,0,1)
D) (1,0,0)
E) (0,1,0)

22) La ecuación $\frac{x-a}{3}=\frac{y-b}{2}=\frac{z-c}{1}$ corresponde a la recta L , ¿cuál de las siguientes opciones corresponde a la ecuación vectorial de L?

A) (x,y,z)=(3,2,1)+k·(a,b,c)
B) (x,y,z)=(1,2,3)+t·(a,b,c)
C) (x,y,z)=(a,b,c)+r·(3,2,1)
D) (x,y,z)=(a,b,c)+m·(1,2,3)
E) (x,y,z)=(2,3,1)+q·(a,b,c)

23) Dado el triángulo de vértices A(3, 0, 0), B(-1, 4, 0) y C(-1, 1, 3), ¿cuál de las siguientes ecuaciones corresponde a una ecuación de la recta que pasa por el vértice C y por el punto medio de AB ?

A) $\frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{3-z}{3}$

B) $\frac{-x+2}{1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z}{3}$

C) $\frac{x+2}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-3}{1}$

D) $\frac{x+1}{1}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-3}{3}$

E) Ninguna de las anteriores

24) Los planos $x-z=3$ y $x+z=7$ son:
A) Coincidentes
B) Paralelos
C) Secantes
D) Ortogonales
E) No se puede determinar.

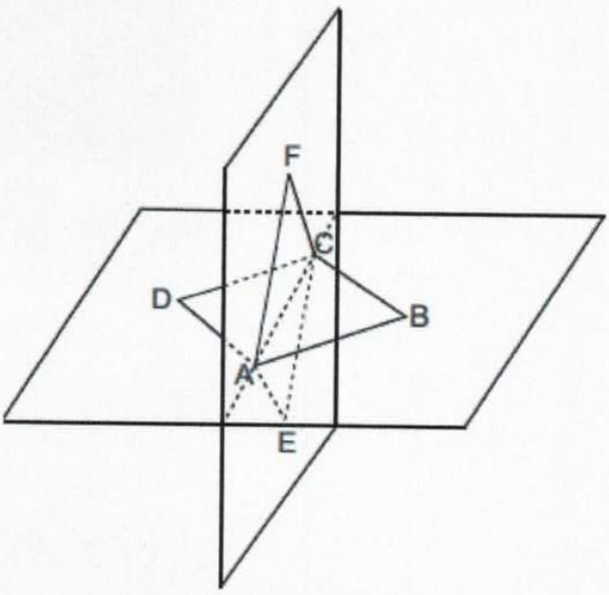
25) ¿Cuál de las siguientes expresiones representa <u>siempre</u> la distancia entre un punto P(a, b, c) y su simétrico con respecto al eje x?

A) 2a
B) $\sqrt{2b^2+2c^2}$
C) $2\sqrt{b^2+c^2}$
D) $4b^2 + 4c^2$
E) 2b + 2c

26) Las rectas $\frac{x-4}{2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z+2}{5}$ **y** $\begin{cases} x = 3+4t \\ y = 1+6t \\ z = 2+10t \end{cases}$ **son:**

A) Coincidentes
B) Paralelas
C) Secantes
D) Se cruzan
E) No se puede determinar.

27) En la figura adjunta, ABCD y AECF son dos cuadrados ubicados en planos perpendiculares entre sí, con $\overline{AC}$ diagonal común. ¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?



I. El triángulo BCF es rectángulo.
II. Los puntos A, B, C, D, E y F son los vértices de un octaedro regular.
III. $\overline{BD}$ y $\overline{EF}$ son las dos diagonales de un mismo cuadrado.

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo III
D) Solo II y III
E) I, II y III