Instituto Nacional José Miguel Carrera
Departamento de Matemática
Primero Medio
Coordinador: C. H. G.
Primer Semestre 2019

# PRODUCTOS NOTABLES

Tanto en la multiplicación algebraica como en la aritmética se sigue un algoritmo cuyos pasos conducen al resultado. Sin embargo, existen productos algebraicos que responden a una regla cuya aplicación simplifica la obtención del resultado. Estos productos reciben el nombre de **productos notables**.
Se llama **producto notable** a un producto que puede ser obtenido sin efectuar la multiplicación.

Algunos de ellos son los siguientes:

## CUADRADO DEL BINOMIO

Recordemos que a la expresión algebraica que consta de dos términos se le llama **binomio**. El producto de un binomio por sí mismo recibe el nombre de **cuadrado del binomio**. El desarrollo de un cuadrado de binomio siempre tiene la misma estructura. Por ejemplo, al elevar al cuadrado el binomio "$a+b$", multiplicando término a término, se obtendría:

$$(a+b)^2 = (a+b)\cdot(a+b) = a\cdot a + a\cdot b + b\cdot a + b\cdot b = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

pero si comparamos la expresión "$(a+b)^2$" con el resultado de su expansión "$a^2+2ab+b^2$" podemos observar que el resultado tiene una estructura como la siguiente:

$$(\square + \Delta)^2 = (\square)^2 + 2\cdot\square\cdot\Delta + (\Delta)^2$$

Donde $\square$ representa al primer término del binomio y $\Delta$ al segundo.

Si tomamos como ejemplo al binomio "a - b", ocurre lo mismo que para a+b sólo que en la reducción de términos semejantes se conserva el signo menos delante del doble producto, o sea:

$$(\square - \Delta)^2 = (\square)^2 - 2\cdot\square\cdot\Delta + (\Delta)^2$$

En ambos casos vemos que se tiene la misma estructura diferenciándose sólo en un signo. A partir de este hecho podemos presentar la fórmula para desarrollar el producto notable **cuadrado del binomio**:

"*El cuadrado de un binomio es igual al cuadrado del primer término más (o menos) el doble del producto del primer término por el segundo más el cuadrado del segundo término*"

La estructura que representa esta fórmula es:

$$(\square \pm \Delta)^2 = (\square)^2 \pm 2\cdot\square\cdot\Delta + (\Delta)^2$$

**Ejemplos:**

a) $(p+2b)^2 = p^2 + 2\cdot p\cdot 2b + (2b)^2 = p^2 + 4pb + 4b^2$

b) $(3m+4n)^2 = (3m)^2 + 2\cdot 3m\cdot 4n + (4n)^2 = 9m^2 + 24mn + 16n^2$

c) $(5x-y)^2 = (5x)^2 + 2\cdot 5x\cdot y + (y)^2 = 25x^2 + 10xy + y^2$

**Representación Geométrica del Cuadrado del Binomio**

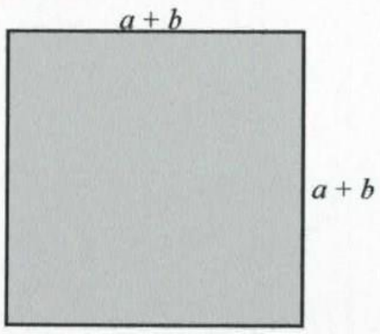
El cuadrado del binomio, como otros productos notables, tiene una representación geométrica en el plano.
Consiste en considerar el área de un cuadrado de lado "$a+b$" y las regiones que estas medidas generan en el cuadrado. Consideremos dos trazos "$a$" y "$b$" :

$a$ $\qquad$ $b$

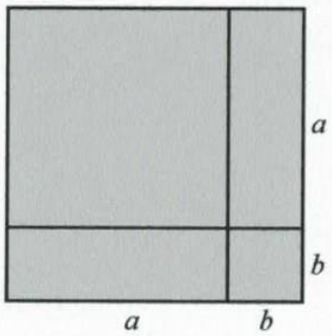
Con ellos se construye un trazo de longitud "$a+ b$":

$a + b$

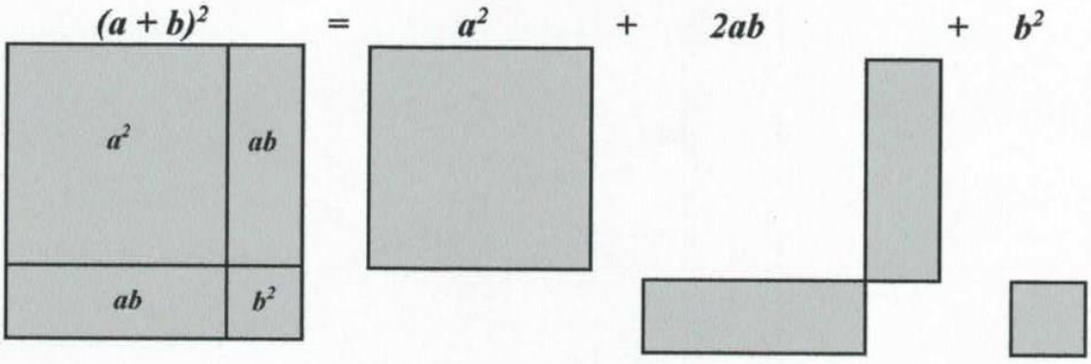
y con él un cuadrado de la misma longitud:




Si se extienden los extremos de los trazos "$a$" y "$b$" éstos dividen al cuadrado en cuatro áreas menores: dos cuadrados, uno de lado "$a$" y otro menor de lado "$b$", y dos rectángulos de largo "$a$" y ancho "$b$".




La suma de las áreas de estos cuadrados y rectángulos es igual al área total del cuadrado de lado $a+ b$, es decir:



**SUMA POR DIFERENCIA**

Consideremos el producto de la suma de dos términos "$a+b$" por su diferencia "$a-b$". Al desarrollar el producto:

$$(a+b)(a-b)=a\cdot a-a\cdot b+b\cdot a-b\cdot b=a^2-b^2$$

Podemos observar que el resultado tiene una estructura como la siguiente:

$$(\square+\Delta)(\square-\Delta)=(\square)^2-(\Delta)^2$$

Es decir, la suma de dos términos por su diferencia es equivalente a la diferencia de los cuadrados de los términos. La fórmula para el producto notable **suma por diferencia** se enuncia como sigue:

"*El producto de una suma de dos términos por su diferencia es igual al cuadrado del primer término menos el cuadrado del segundo*"

**Ejemplos:**

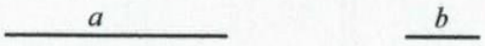
I. $(x+5)(x-5)=x^2-25$

II. $(a^2-3)(a^2-3)=a^4-9$

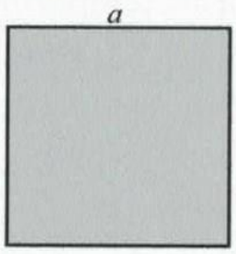
III. $(2p^5+6q^4)(2p^5-6q^4)=4p^{10}+36q^8$

**Representación Geométrica de la Suma por Diferencia**

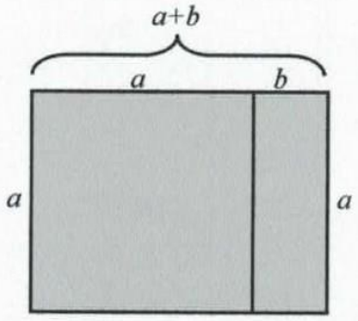
Para representar la suma por diferencia, utilizaremos un rectángulo de largo "$a+b$" y ancho "$a-b$". Considere dos trazos "$a$" y "$b$" cualesquiera:



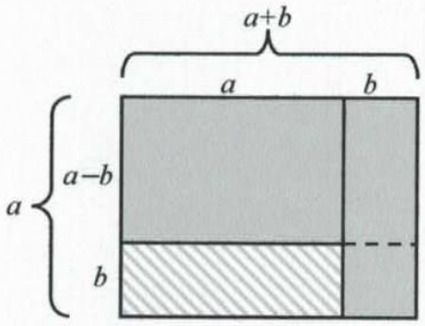

Con el trazo $a$ se construye el siguiente cuadrado:



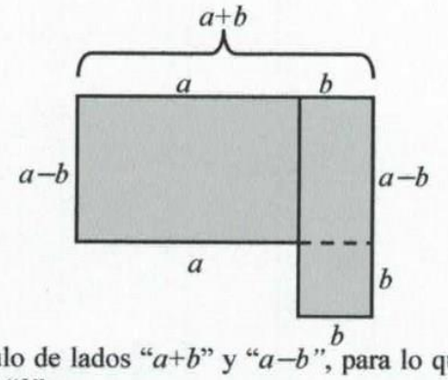

A este cuadrado se le agrega un rectángulo de lados "$a$" y "$b$":



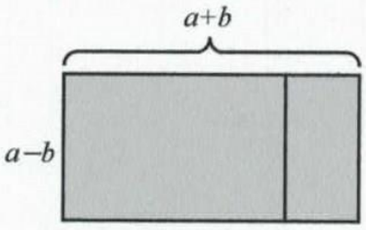
De este rectángulo (de lados "$a$" y "$a+b$") se le recorta un rectángulo de lados "$a$" y "$b$" (el achurado en la figura):



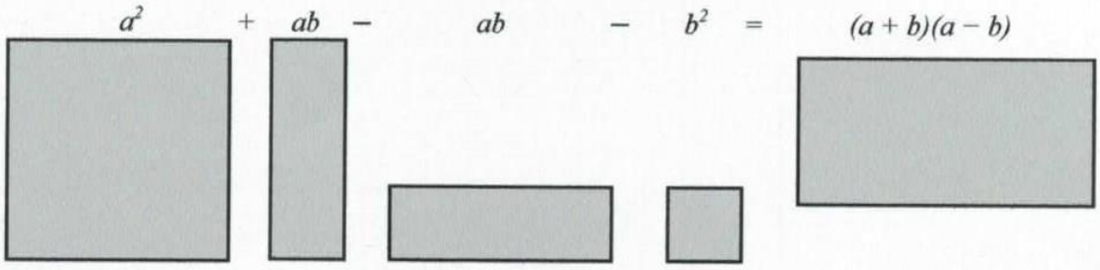

|quedando:



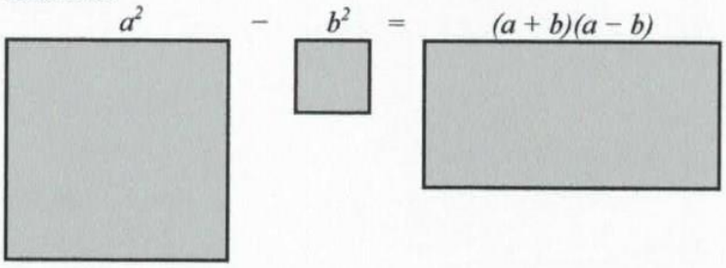

El área buscada es la del rectángulo de lados "$a+b$" y "$a-b$", para lo que debemos recortarle a la figura anterior el cuadrado de lado "$b$",




Finalmente, la representación geométrica de la suma por diferencia se puede resumir por el siguiente esquema:




Entonces:



## MULTIPLICACIÓN DE BINOMIOS CON UN TÉRMINO COMÚN

Este producto notable corresponde a la multiplicación de binomios de la forma "$a+b$" por "$a+c$". Al desarrollar el producto

$$(a+b)\cdot(a+c)=a^2+(b+c)a+bc$$

se observa que la estructura es la siguiente:

$$(\square+\blacklozenge)(\square+\triangle)=(\square)^2+(\blacklozenge+\triangle)\cdot\square+\cdot\triangle$$

La fórmula para el producto de **BINOMIOS CON UN TÉRMINO COMÚN** se enuncia como sigue:

"*Cuadrado del primer término, más la suma de los términos distintos multiplicada por el término común y más el producto de los términos distintos*"

**Ejemplos:**

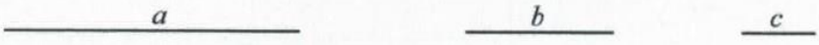
a) $(x+3)\cdot(x+2)=x^2+(3+2)x+3\cdot2=x^2+5x+6$, observa que $\begin{cases}3+5=5\\3\cdot2=6\end{cases}$

b) $(a+8)\cdot(a-7)=a^2+(8-7)a+8\cdot^{-}7=a^2+a-56$, observa que $\begin{cases}8+^{-}7=1\\8\cdot^{-}7=^{-}56\end{cases}$

c) $(p-9)\cdot(p-12)=p^2+(^{-}9+^{-}12)\cdot p+^{-}9\cdot^{-}12=p^2+^{-}21p+108$, observa que $\begin{cases}^{-}9+^{-}12=1\\^{-}9\cdot^{-}12=108\end{cases}$

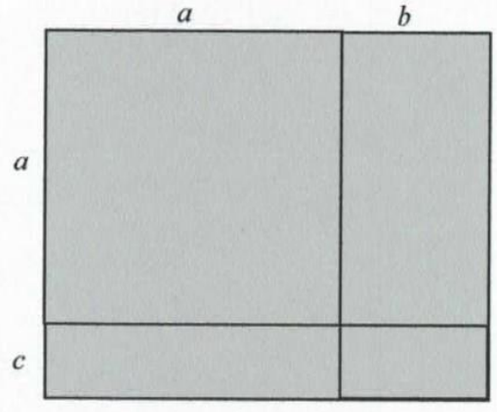
**Representación Geométrica de la Multiplicación de Binomios con un Término Común**

Se consideran tres trazos "*a*", "*b*" y "*c*" de medidas distintas, por ejemplo:




Con ellos se construyen dos trazos de longitudes "$a+b$" y "$a+c$":

Y a partir de estos se construye un rectángulo de lados "$a+b$" y "$a+c$":

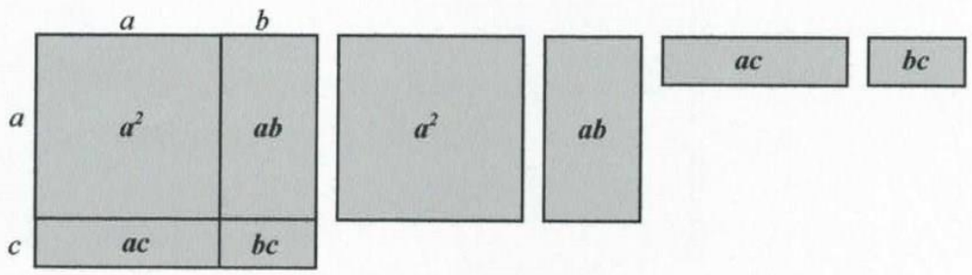



De aquí podemos establecer la siguiente igualdad entre áreas:

$$(a+b)\cdot(a+c)=a^2+ab+ac+bc$$

El siguiente esquema muestra este producto:

$$(a + b)\cdot(a + c) = a^2 + ab + ac + bc$$




A continuación presentamos **otros productos notables** con sus respectivas fórmulas:

- **Cubo de un binomio**
  - i. $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
  - ii. $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
- **Cuadrado de un trinomio**
  - i. $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$
  - ii. $(a-b-c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac + 2bc$
- **Suma y resta de cubos**
  - i. $(a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$
  - ii. $(a-b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$

## EJERCICIOS

**I. Resuelve aplicando productos notables:**

**1)** $(x+3)^2 =$

**2)** $(5+a)^2 =$

**3)** $(6x+y)^2 =$

**4)** $(9+4x)^2 =$

**5)** $(7x+11)^2 =$

**6)** $(a+b)^2 =$

**7)** $(1+3x^2)^2 =$

**8)** $(2x+3y)^2 =$

**9)** $(a^2x+by^2)^2 =$

**10)** $(3a^3+8b^4)^2 =$

**11)** $(4m^5+5n^6)^2 =$

**12)** $(7a^2b^3+5x^4)^2 =$

**13)** $(4xy^2+5wz^3)^2 =$

**14)** $(8x^2y+9m^3)^2 =$

**15)** $(x^{10}+10y^{12})^2 =$

**16)** $(x^m+x^n)^2 =$

**17)** $(a^x+b^{x+1})^2 =$

**18)** $(x^{a+1}+y^{x-2})^2 =$

**19)** $\left(1+3x^4\right)^2 =$

**20)** $\left(7a^2b^3+5x^4\right)^2 =$

**21)** $\left(a^3-b^2\right)\left(a^3+b^2\right) =$

**22)** $(1-8xy)\cdot(1+8xy) =$

**23)** $\left(a^{x+1}-2b^{x-1}\right)\left(2b^{x-1}+a^{x+1}\right) =$

**24)** $(x+y+z)(x+y-z) =$

**25)** $\left(a^2-2b\right)^3 =$

**26)** $\left(x^3+6\right)\left(x^3-8\right) =$

**27)** $\left(x^3y^3-6\right)\left(x^3y^3+6\right) =$

**28)** $\left(5a^{x+1}-7\right)\left(5a^{x+1}-4\right) =$

**29)** $\left(\frac{2}{3}a^6b^4c^{-3}+11ab^2\right) =$

**30)** $\left(5x^2-3\right)^3 =$

**31)** $(x-1)\left(x^2+x+1\right) =$

**32)** $(2+y)\left(4-2y+y^2\right) =$

**33)** $\left(a^{2n}b^m-2x^3y^a\right)\left(a^{2n}b^m+2x^3y^a\right) =$

**34)** $\left(x^{a+1}-8\right)\left(x^{a+1}+9\right) =$

**35)** $\left(a^2b^2-1\right)\left(a^2b^2+7\right) =$

**36)** $(5-ab)\left(25+5ab+a^2b^2\right) =$

**37)** $\left(2mn^2+3m^{-1}n^{-3}\right)^2 =$

**38)** $\left(3a^{x+y}-2\right)\left(3a^{x+y}-5\right) =$

**39)** $\left(\frac{2}{3}a^2b-\frac{1}{5}x^3y^4\right)^2 =$

**40)** $\left(m^2-m+n\right)\left(n+m+m^2\right) =$

**41)** $(2a-3b+c)^2 =$

**42)** $\left(x^2y^{-3}z^{-6}-5a^3b^7c\right)\left(x^2y^{-3}z^{-6}+5a^3b^7c\right) =$

**43)** $(x+2)^2 =$

**44)** $(x+2)(x+3) =$

**45)** $(x+1)(x-1) =$

**46)** $(x-1)^2 =$

**47)** $(n+3)(n+5) =$

**48)** $(m-3)(m+3) =$

**49)** $(a+b-1)(a+b+1) =$

**50)** $(1+b)^3 =$

**51)** $(a^2+4)(a^2-4) =$

**52)** $(3ab-5x^2)^2 =$

**53)** $(ab+3)(3-ab)=$

**54)** $(1-4ax)^2=$

**55)** $(a^2+8)(a^2-7)=$

**56)** $(x+y+1)(x-y-1)=$

**57)** $(1-a)(a+1)=$

**58)** $(m-8)(m+12)=$

**59)** $(x^2-1)(x^2+3)=$

**60)** $(x^3+6)(x^3-8)=$

**61)** $(5x^3+6m^4)^2=$

**62)** $(x^4-2)(x^4+5)=$

**63)** $(3m-5y)(3m+5y)=$

**64)** $(a-2b^3)(a+2b^3)=$

**65)** $[(a+b)+2]\ [(a+b)-2]=$

**66)** $\left(\frac{1}{3}+\frac{3}{2}a\right)\left(\frac{1}{3}-\frac{3}{2}a\right)=$

**67)** $(2m^3-n^4)(2m^3+n^4)=$

**68)** $(a^2x-3)(a^2x+3)=$

**69)** $(a+2b+2)(x+2b-2)=$

**70)** $(ab+c)(ab-c)=$

**71)** $(3x^2-b)(b+3x^2)=$

**72)** $\left((a-x)^3-(a+b)\right)\left((a-b)^3+(a+b)\right)=$

**73)** $(5x+2y)(2y-5x)=$

**74)** $\left(\frac{3}{4}x^3-2m^2y^3\right)\left(\frac{3}{4}x^3+2m^2y^3\right)=$

**75)** $(a-b)^3=$

**76)** $(3y+5z)^3=$

**77)** $\left(\frac{1}{2}x-y\right)^3=$

**78)** $\left(\frac{3}{4}a+\frac{1}{4}b\right)^3=$

**79)** $(3a-4b)^3=$

**80)** $(7-2x)^3=$

**81)** $(2x^2-5y^3)^3=$

**82)** $\left(\frac{2}{3}a+4m\right)^3=$

**83)** $\left(5^x-5^y\right)^3=$

**84)** $\left(x^{a+1}-x^{a-2}\right)^3=$

**85)** $\left(\frac{1}{2}m^2-n^2\right)^3=$

**86)** $(a+b-c)^3=$

**87)** $\left(\frac{2}{5}x-y^4\right)^3=$

**88)** $\left(a^{3b}+b^{2b}\right)^3=$

**89)** $\left(3a-2b^4\right)^3=$

**90)** $\left(\frac{3}{4}x^3+\frac{2}{3}y^2\right)^3=$

**91)** $(a-b-c)^3$

**92)** $(-x-y)^3=$