INSTITUTO NACIONAL
Gral. José Miguel Carrera
Departamento de matemática
Prof.: Eugenio López Torres
Prof. Sr.: Juan Carlos Costa Lazcano
2017

ELEMENTOS DE LOGICA Y TEORIA DE CONJUNTOS

Esta guía de contenidos y ejercicios ha sido construida con el objetivo de ofrecer al estudiante de tercero medio del Instituto Nacional, una introducción a la lógica elemental y teoría de conjuntos.
Los temas aquí mencionados y tratados, constituyen a grandes rasgos, nociones básicas de la lógica proposicional, proposiciones, conectivos lógicos, operaciones entre conjuntos y cuantificadores.
Gran parte de los contenidos y ejercicios han sido extraídos de los primeros capítulos del texto "Elementos de lógica y computación de Alejandro Tiraboschi y Patricia Kisbye, a la facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas de la Universidad de Chile con su libro APUNTES DEL CURSO TEORÍA DE FUNCIONES REALES, libro ocupado en la escuela de verano así como también el siempre importante aporte del ex profesor Don Orlando Ceballos y la del actual profesor del Instituto Nacional y de la Universidad de Santiago (USACH), Don Luis Arancibia.

Uno de los procesos por los cuales adquirimos conocimiento es el proceso del razonamiento, pero también ocurre que existen una variedad inmensa de modos o formas mediante las cuales razonamos o argumentamos a favor de una conclusión. Ciertas formas del razonamiento parecen mostrar que, si se suponen ciertas premisas, entonces la conclusión se sigue necesariamente.
A tales razonamientos se les ha denominado deductivos y forman el objetivo central de lo que clásicamente se le ha denominado como LOGICA.

En un sentido amplio el término lógica hace referencia al estudio de todos los razonamientos, y en un sentido estricto ha estado circunscrito al estudio del razonamiento deductivo.

Se distinguen dos tipos de lógica: la lógica clásica tradicional y la lógica moderna y en donde podemos destacar que

i) La lógica clásica considera el "juicio" y a "proposición" y en donde el juicio es un acto mental por medio del cual pensamos algún enunciado y la proposición es lo pensado en dicho acto
ii) La lógica moderna se remite solamente las "proposiciones", prescindiendo de los juicios, es así que tenemos la "lógica proposicional" o "sentencial" y que trata a las proposiciones como unidades y hace combinaciones entre ellas.

PROPOSICION: es una sentencia declarativa que puede ser verdadera o falsa, pero no ambas a la vez

Una expresión en la que no se pueda determinar si es verdadera o falsa, NO es una proposición.

La veracidad o falsedad de una proposición recibe el nombre de "valor de verdad" y viene dada por algún criterio independiente de la proposición.

Algunas proposiciones pueden tener distinto valor de verdad según sea el contexto y el caso en que están considerando, por ejemplo: "hoy es primero de Enero", según sea la fecha cuando está efectuándose la proposición esta puede ser verdadera o falsa.

NOTACION: a las proposiciones las denotaremos por letras minúsculas, tales como: p , q , r , s , …… , etc. Y las llamaremos proposiciones simples, estos símbolos pueden ser modificados o combinados por los llamados conectivos, dando paso a lo que llamaremos proposiciones compuestas.

Ejemplos de proposiciones;

Sea p = El perro es un animal domesticable
q = En el año 1962 Chile fue campeón mundial de futbol
r = Diego Starkhi es alumno de segundo medio 2017 del Instituto Nacional

Ejemplos de expresiones que no son proposiciones;

Sea t = suba la escalera hasta el segundo piso
v = $(2\,x-3)^2$

Ejemplos de proposiciones compuestas:
Sea w = El perro es un animal domesticable y las rosas rojas son bebestible

Los conectivos lógicos que estudiaremos son la negación ($\sim$), la conjunción ($\wedge$), la disyunción ($\vee$), la disyunción exclusiva ($\underline{\vee}$), la implicación ($\Longrightarrow$) y la doble implicación ($\Longleftrightarrow$).

Función proposicional: La expresión p(x) = $(2\,x - 3) \ \geq 0$ no es una proposición, de tal modo que si la queremos transformar en una proposición debemos dar valores a "x", a esta proposición le llamaremos "proposición abierta o función proposicional".

La negación modifica una proposición y por lo tanto se dice 1 – aria o unitaria, sin embargo, las otras se aplican por lo menos a dos proposiciones y reciben el nombre de 2 – arios o binarios.

Ejemplo: consideremos las siguientes proposiciones;

p = "25 es un número par"
q = "$\sqrt{2}$ es un número irracional

Algunas combinaciones que podríamos hacer son:

i) "25 no es un número par" ≡ $\sim$ p
ii) "25 es un número par y $\sqrt{2}$ es un número racional ≡ p $\wedge$ q
iii) "25 no es un número par y $\sqrt{2}$ es un número racional" ≡ $\sim$ p $\wedge$ q
iv) "25 es un número par o $\sqrt{2}$ es un número racional" ≡ p $\vee$ q
v) "Si 25 es un número par entonces $\sqrt{2}$ es un número racional" ≡ p $\Longrightarrow$ q
vi) "25 es un número par solo si $\sqrt{2}$ es un número racional" ≡ p $\Longleftrightarrow$ q

NEGACION

Como se dijo anteriormente la negación es una operación unitaria que se aplica a una proposición y tiene el efecto de revertir el valor de verdad de la proposición inicial, es decir, si "p" es verdadera entonces "$\sim$ p" es falsa y si "p" es falsa entonces "$\sim$p" es verdadera, lo que se simboliza en la siguiente tabla de verdad.

p	$\sim$ p
V	F
F	V

Una tabla construida de esta forma en la que se incluyen simultáneamente los valores de verdad de la proposición "p" con un determinado conectivo es lo que llamaremos "tabla de verdad".

Ejemplo:
1.-) Sea la proposición p : "5 es divisor de 20", el valor de verdad de "p" es verdadera por lo que su negación debe ser una proposición falsa, entonces esta ($\sim$p) debe expresar exactamente lo contrario, es decir, "5 no es divisor de 20".

p	$\sim$ p
V	F
F	V

2.-) Sea la proposición q: "Todos los gatos son negros" y la proposición r: "Algunos gatos son negros", en este caso debemos tener especial cuidado ya que "r" **NO** es la negación de "q", ya que perfectamente ambas pueden ser verdaderas y tampoco podemos afirmar que la proposición s: "Ningún gato es negro" sea la negación de "q" ya que si existe al menos un gato que no sea negro, ambas proposiciones serían falsas, por lo que la negación de q debiera ser enunciada como "Al menos un gato no es negro".

p	$\sim$ p
V	F
F	V

CONJUNCION

La conjunción: Es un conectivo que permite formar proposiciones compuestas a partir de dos o más proposiciones simples y que será verdadera sólo si cada una de ellas es por sí sola verdadera, basta con que solo una de las proposiciones simples sea falsa para que la proposición compuesta sea falsa y que la expresaremos a través del conectivo "y", "de comas" o de una combinación de ambas o también a través de palabras tales como "pero".

Ejemplo: Dadas las proposiciones p: "Santiago tiene cerros" y r: "Santiago tiene mar", la proposición compuesta "p $\wedge$ r", es decir "Santiago tiene cerros y tiene mar" es falsa puesto que Santiago no tiene mar.-17

La tabla de verdad de la conjunción queda expresada de la siguiente manera:

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Ejemplo: Si p es "Algunas aves vuelan" y q es "El perro es un ave", entonces la proposición compuesta "$p \wedge q$" expresa "Algunas aves vuelan y el perro es un ave", lo que obviamente es falso puesto que el perro NO es un ave, sin embargo, la proposición $p \wedge \sim q$ que expresa "Algunas aves vuelan y el perro no es un ave" es VERDADERA puesto que ambas proposiciones son verdaderas y en la conjunción si las proposiciones simples que la componen son todas verdaderas la proposición compuesta es Verdadera.

DISYUNCIÓN

Existen dos operadores para la disyunción y que son la disyunción incluyente o inclusiva y la disyunción excluyente o exclusiva.

La disyunción excluyente o exclusiva de dos proposiciones es verdadera sólo si una de las proposiciones simples es verdadera, en cambio, la disyunción incluyente o inclusiva basta que solo una de ellas sea verdadera para que la compuesta sea verdadera, dicho en otras palabras, la proposición compuesta será falsa sólo si ambas son falsas en caso contrario será verdadera.

En muchos casos el contexto de la frase nos indica si se trata de un "o" incluyente o un "o" excluyente, por ejemplo la frase "Los alumnos serán promovidos sólo si aprueban todas sus asignaturas o si reprueban una de ellas y tienen al menos un 80 % de asistencia a clases", en este ejemplo se verifica claramente que se trata de un "o" incluyente, y si vamos a un casino a almorzar el menú ejecutivo y que dice "postres: flan o ensalada de fruta" vemos que se trata de un "o" excluyente, puesto que sólo podemos elegir un tipo de postre y no ambos.
Cuando no es claro el contexto de la oración es conveniente terminarla con la frase "con o ambas" (incluyente) o con la frase "pero no ambas" (excluyente).

La tabla de verdad de la disyunción queda expresada de la siguiente manera:

"o" incluyente

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

"o" excluyente

p	q	$p \underline{\vee} q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Además de los conectivos (negación, disyunción y conjunción) existen otros conectivos, como por ejemplo la condicional o implicación.

CONDICIONAL

Otra manera de conectar proposiciones simples es diciendo: "Si se cumple p entonces se cumple q", es decir por medio de una implicación, este condicional recibe el nombre de condicional o implicación y se simboliza por $\Longrightarrow$

Ejemplo: Supongamos que para pasar de curso es necesario haber asistido al menos el 80% de las horas de clases lectivas, entonces podemos formar una proposición compuesta con las siguientes proposiciones simples

p: He pasado de curso
q: He asistido al 80 % de las horas de clases lectivas

utilizando el condicional, obtenemos $p \Longrightarrow q$: Si he pasado de curso entonces He asistido al 80 % de las horas de clases lectivas, es decir, la proposición "q" se cumple si se cumple la proposición "p", o, dicho en otras palabras, si se ha cumplido "p" entonces se cumple "q". También se dice que "p" es el antecedente y "q" es el consecuente.

El condicional es verdadero si el antecedente es falso ó si el antecedente y el consecuente son ambos verdaderos, si el antecedente es verdadero y el consecuente es falso, el condicional es falso.

La tabla de verdad de la condicional o implicación queda expresada de la siguiente manera:

p	q	$p \Longrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

En la condicional o implicación "$p \Longrightarrow q$", "p" es la condición suficiente para que ocurra "q", es decir, es suficiente que ocurra "p" para que ocurra "q" y necesariamente ocurrirá q si ocurre "p"

A diferencia de los otros conectivos, la tabla de verdad del condicional no se condice con el uso que hacemos de este tipo de expresiones en el lenguaje natural. Por ejemplo, para el lenguaje cotidiano, la expresión:
Si llueve entonces Juan usa paraguas pareciera que indica que
si no llueve entonces Juan no usa paraguas. Es decir, no sería verdadera la proposición si el antecedente es falso y el consecuente verdadero. Sin embargo, para la lógica esto es verdadero.

Si $p \Longrightarrow q$ es una implicación, entonces $q \Longrightarrow p$ es la recíproca,
$\sim p \Longrightarrow \sim q$ es la inversa y
$\sim q \Longrightarrow \sim p$ es la contrarrecíproca. Las tablas de verdad para $q \Longrightarrow p$, $\sim p \Longrightarrow \sim q$ y $\sim q \Longrightarrow \sim p$
son:

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \Longrightarrow q$	$\sim p \Longrightarrow \sim q$	$q \Longrightarrow p$	$\sim q \Longrightarrow \sim p$
V	V	F	F	V	V	V	V
V	F	F	V	F	V	V	F
F	V	V	F	V	F	F	V
F	F	V	V	V	V	V	V

Observemos que los valores de verdad de una implicación $p \Longrightarrow q$ y de su contrarrecíproca $\sim q \Longrightarrow \sim p$ son los mismos para todos los valores de p y q posibles, es decir, son lógicamente equivalentes.

Debemos notar que hay otras formas de expresar un condicional que no es necesariamente el sí . . . entonces. Los siguientes ejemplos también son condicionales de la forma $p \Longrightarrow q$:

Viajo en taxi si estoy apurado. (p: "Estoy apurado", q: "Viajo en taxi".)
Solo si es sábado voy al cine. (p: "Voy al cine", q: "Es sábado".)
Es suficiente que llueva para que me quede en casa. (p: "Llueva", q: "Me quede en casa").

BICONDICIONAL o DOBLE IMPLICACIÓN o EQUIVALENCIA

Una proposición bicondicional será verdadera si y sólo si ambas proposiciones tienen el mismo valor de verdad. El bicondicional entre p y q se simboliza $p \Longleftrightarrow q$ y se lee p si y sólo si q.
El bicondicional $p \Longleftrightarrow q$ puede pensarse también como la proposición compuesta $(p \Longrightarrow q) \wedge (q \Longrightarrow p)$.

Ejemplo: Supongamos que para aprobar una asignatura la nota debe ser mayor que 4. Entonces con las proposiciones simples

p: "Apruebo la asignatura",
q: "La nota es mayor que 4",

y con el conectivo ⟺formamos la proposición compuesta p ⟺ q: " Apruebo la asignatura si y sólo si la nota es mayor que 4".

La tabla de verdad de la bicondicional o doble implicación o equivalencia queda expresada de la siguiente manera:

p	q	p ⟺ q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Es un ejercicio sencillo comprobar que esta tabla coincide con la tabla de verdad de (p ⟹ q) ∧ (q ⟹ p).

3. Argumentos y demostraciones
En el transcurso de la enseñanza media has podido verificar que ha sido muy común enunciados con el nombre de teoremas, Teoremas, Lemas, Proposiciones, Corolarios, etc. Este tipo de enunciados afirman que dadas ciertas hipótesis se cumple una conclusión. Estos enunciados no son decretos ni leyes, sino que deben ser demostrados, y la demostración o prueba de los mismos hace uso de la lógica.

Ejemplo, si afirmamos que, si un múltiplo de 4 es un número m, entonces es múltiplo de 2, esto tiene como hipótesis que cierto número es múltiplo de 4, y como conclusión que el número es múltiplo de 2.

Para demostrar que la conclusión es cierta, se suelen usar uno de los siguientes caminos: la demostración directa o la demostración indirecta.
La demostración directa es aquella que nos muestra que siempre que las hipótesis sean verdaderas se cumple que la conclusión lo es.

Por ejemplo, si un número n es múltiplo de 4, es porque n = 4· k, para cierto entero k. Pero entonces n = (2 · 2)· k, y por la asociatividad del producto resulta n =2 · (2 · k), es decir que: n es múltiplo de 2.

En la demostración indirecta o demostración por el absurdo se hace uso del hecho que la implicación p ⟹ q es lógicamente equivalente a ∼ q ⟹ ∼ p. Es decir, se demuestra que siempre que el consecuente es falso también el antecedente lo es. Así, en nuestro ejemplo, deberíamos probar que si n no es múltiplo de 2 entonces tampoco es múltiplo de 4.

La justificación mediante un contraejemplo consiste en dar un ejemplo en el cual se cumplen las hipótesis, pero no se cumple la conclusión.

Por ejemplo, ante la afirmación si un número es natural entonces es par, basta con notar que el número 3, que cumple con la hipótesis de ser natural, no es un número par. Este contraejemplo sirve para mostrar que la afirmación es falsa.

Combinación de proposiciones con conectivos lógicos

Utilizando los conectivos lógicos estamos en condiciones de formar proposiciones compuestas. Si no tenemos el cuidado de hacer un uso adecuado de los paréntesis corremos el riesgo de formar expresiones que son ambiguas e imposibles de interpretar.

Por ejemplo: p ⟹ p ∧ q ⟺ r
puede ser interpretada como (p ⟹ (p ∧ q)) ⟺ r o bien como (p ⟹ p) ∧ (q ⟺ r), o también hay otras combinaciones de paréntesis. Por lo tanto expresiones como la descrita en el ejemplo no son correctas y deben ser evitadas con un uso adecuado de paréntesis. Sin embargo, el exceso de paréntesis suele generar expresiones largas y difíciles de leer y, por lo tanto, se han creado reglas para eliminar algunos de ellos.
Estas reglas son llamadas reglas de prioridad o de precedencia. Generalmente cada conectivo tiene una prioridad dada, y las conexiones con una prioridad más alta introducen una unión más fuerte que las conexiones con una prioridad más baja. La conexión ∼ tiene la prioridad más alta.
Por ejemplo, la proposición ∼p ∧ q debe ser entendida como (∼p) ∧ q, y no como ∼ (p ∧ q). En el caso de las conexiones binarias el orden de prioridades, de mayor a menor, es ∧, ∨, ⟹ y ⟺ Pese a que la prioridad de ∧ es

mayor que la de ⟹, suele no hacerse distinción entre ellos y escribir los paréntesis correspondientes para evitar confusiones. Lo mismo puede decirse de la relación entre ⟹ y ⟺ Veamos ejemplos donde se aplica el uso de las prioridades:
p ⟹ p ∨ q, debe ser interpretada como p ⟹ (p ∨ q). La expresión p ∨ ~r ⟹ p ∨ q, debe ser interpretada como (p ∨ (¬r)) ⟹ (p ∨ q).

Pese a estas reglas algunas expresiones requieren el uso de paréntesis.
Ejemplo: Dar la tabla de verdad para (p ⟹ q) ∨ [(q ∨ ~ r) ⟹ (p ∨ r)].

p	q	r	~ r	p ⟹ q	q ∨ ~ r	p ∨ r	[(q ∨ ~ r) ⟹ (p ∨ r)]	(p ⟹ q) ∨ [(q ∨ ~ r) ⟹ (p ∨ r)]
V	V	V	F	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	V	V	V	V
V	F	V	F	F	F	V	V	V
V	F	F	V	F	V	V	V	V
F	V	V	F	V	V	V	V	V
F	V	F	V	V	V	F	F	V
F	F	V	F	V	F	V	V	V
F	F	F	V	V	V	F	F	V

Obs.: Dos proposiciones son equivalentes si tienen exactamente la misma tabla de verdad

p	q	~ p	~ q	p ⟹ q	$(\sim q)$ ⟹ (~p)	(p ⟹ q) ⟺($(\sim q)$ ⟹ (~p))
V	V	F	F	V	V	V
V	F	F	V	F	F	V
F	V	V	F	V	V	V
F	F	V	V	V	V	V

Obs.: $(\sim q) \wedge (\sim p)$ ⟺ ~(p ∨ q)
$(\sim q) \vee (\sim p)$ ⟺ ~(p ∧ q)

Definiciones: Llamaremos

a) TAUTOLOGÍA: A toda proposición compuesta que es verdadera cualesquiera sean los valores de verdad de las proposiciones simples que la componen.
b) CONTRADICCIÓN: A toda proposición compuesta que es falsa cualesquiera sean los valores de verdad de las proposiciones simples que la componen
c) CONTINGENCIA: A toda proposición compuesta que no es ni Tautología ni contradicción

Obs.: A medida que la cantidad de proposiciones aumenta, también aumenta la cantidad de combinaciones que se pueden realizar y su aumento es exponencial, siendo 2^{n}, donde "n" es el número de proposiciones.

TAUTOLOGIAS BÁSICAS: Sean p , q ∧ r proposiciones lógicas, se tiene que

1.-) Idempotencia:

- (p ∧ p) ⟺ p
- (p ∨ p) ⟺ p
- p ∨ F ⟺ p
- p ∧ F ⟺ F
- p ∨ V ⟺ V
- p ∧ V ⟺ p
- p ∨ ~p ⟺ V
- p ∧ ~ p ⟺ F

2.-) Conmutatividad:

- p ∨ q ⟺ q ∨ p
- p ∧ q ⟺ q ∧ p

3.-) Asociatividad:

- p ∧ (q ∧ r) ⟺ (p ∧ q) ∧ r
- p ∨ (q ∨ r) ⟺ (p ∨ q) ∨ r

4.-) Distributividad

- $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
- $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

5.-) De Morgan

- $\sim(p \vee q) \Leftrightarrow (\sim p) \wedge (\sim q)$
- $\sim(p \wedge q) \Leftrightarrow (\sim q) \vee (\sim p)$

6.-) $\sim(\sim p) \Leftrightarrow p$

7.-)

- $p \wedge q \Rightarrow p$
- $p \Rightarrow p \vee q$

8.-) Reflexividad

- $p \Rightarrow p$
- $p \Leftrightarrow p$

9.-) Simetría de la equivalencia: $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (q \Leftrightarrow p)$

10.-) Caracterización del implica: $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim p) \vee q$

11.-) Contrarecíproca: $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow [(\sim q) \Rightarrow (\sim p)]$

12.-) Caracterización de la equivalencia: $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow [(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)]$

13.-) Transitividad:

- $[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$
- $[(p \Leftrightarrow q) \wedge (q \Leftrightarrow r)] \Rightarrow (p \Leftrightarrow r)$

14.-) $\sim(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge (\sim q))$

Ejemplo: Demostrar que $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow [(\sim p) \wedge (\sim q)] \vee (p \wedge q)$

Dem.: $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow [(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)]$ por 12
$\Leftrightarrow ((\sim p) \vee q) \wedge ((\sim q) \vee p)$ por 10
$\Leftrightarrow [(\sim p) \vee q) \wedge (\sim q)] \vee [(\sim p) \vee q) \wedge p]$ por 4
$\Leftrightarrow \{[(\sim p) \wedge (\sim q)] \vee [q \wedge (\sim q)]\} \vee \{[(\sim p) \wedge p] \vee (q \wedge p)\}$ por 4
$\Leftrightarrow \{[(\sim p) \wedge (\sim q)]\} \vee \{(q \wedge p)\}$ Q.E.D.

Ejemplo: Demostrar explorando las tablas de verdad que la proposición compuesta
$[\{p \Rightarrow (\sim q) \wedge (r \Rightarrow q)\}] \Rightarrow [p \Rightarrow (\sim r)]$ es una Tautología
En estos casos se acepta explorar la tabla de verdad de la proposición, desechando los casos fáciles, es decir, cuando el argumento es Falso, puesto que cualquiera sea el valor de verdad de la consecuencia, en este caso particular partiremos diciendo que:
$[\{p \Rightarrow (\sim q) \wedge (r \Rightarrow q)\}]$ es verdadero, como la conjunción es V sólo si ambas son V, tenemos que
$p \Rightarrow (\sim q)$ es V
$(r \Rightarrow q)$ es V, pero como tenemos que estudiar el caso de $p \Rightarrow (\sim r)$, esta parte la desechamos y sólo nos abocamos al caso de $p \Rightarrow (\sim q)$ y ahora basta con analizar el caso de que "p" sea Verdadera.
Si p es verdadera entonces $\sim q$ es verdadera, lo que implica que "q" es Falsa, y esto implica a su vez que "r" sea Falsa, puesto que $(r \Rightarrow q)$ es Verdadera, por lo tanto $\sim r$ es Verdadera, por lo tanto, la proposición $p \Rightarrow (\sim r)$ será Verdadera, ya que "p" es Verdadera y "$\sim r$" es verdadera y en la implicancia $V \Rightarrow V$ es verdadera

Ejemplo: Demostrar por reducción al absurdo que $\{[p \Rightarrow (\sim q)] \wedge (r \Rightarrow q)\} \Rightarrow [p \Rightarrow (\sim r)]$

Este método se aplica óptimamente en una proposición de la forma $\alpha \Rightarrow \beta$ y usando el hecho que $\sim(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge (\sim q))$ la idea consiste en suponer que la negación es verdadera y concluir que esto no puede ser, veamos qué pasa con nuestro ejemplo:
$[\{p \Rightarrow (\sim q) \wedge (r \Rightarrow q)\}] \wedge [\sim (p \Rightarrow (\sim r))]$ es verdadera, entonces se tiene que
$[\{p \Rightarrow (\sim q) \wedge (r \Rightarrow q)\}]$ Es verdadera, por lo que afirmamos que
$p \Rightarrow (\sim q)$ es verdadera y $(r \Rightarrow q)$ es verdadera, puesto que si $p \Rightarrow (\sim q)$ es verdadera y $\sim q \Rightarrow (\sim r)$ es verdadera, entonces por transitividad $p \Rightarrow (\sim r)$ (1) es verdadera, pero
$\sim (p \Rightarrow (\sim r))$ es verdadera por hipótesis, por lo que
$p \Rightarrow (\sim r)$ es falsa, pero por (1) $p \Rightarrow (\sim r)$ es verdadera lo que no puede ser
En consecuencia, la proposición es una tautología, puesto que su negación no puede ser verdadera.

Ejemplo: Demostrar que $\sqrt{2}$ no es un número racional
Lo demostraremos por contradicción, suponiendo que si existe un racional cuyo cuadrado es 2

Supongamos que sí existe un racional cuyo cuadrado es 2, es decir, existen "m y n" números enteros con "n≠ 0", m y n primos relativos entre sí, tal que $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2$ de donde se obtiene que
$\frac{m^2}{n^2} = 2$ aplicando una de las propiedades de las potencias, esto implica que
$m^2 = 2\,n^2 \implies m^2$ es par por lo que m es par, luego m lo podemos escribir como 2 k con k ∈ $\mathbb{Z}$
Reemplazando obtenemos que $(2\,k)^2 = 2\,n^2 \Longrightarrow 4\,k^2 = 2\,n^2$ simplificando por 2 obtenemos que $2\,k^2 = n^2$ lo que significa que n^2 es par, luego n es par, es decir, $\mathrm{n} = 2\,j\,, algún\ j\ \in \mathbb{Z}$.
De donde se concluye que ambos números "m y n" tienen un factor común que es el 2, pero nuestra hipótesis decía que eran primos relativos entre sí lo que conduce a una contradicción, por lo tanto, podemos afirmar que NO existen m y n números enteros tales que $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2$

FUNCIONES PROPOSICIONALES

Definición: Se llama función proposicional en la variable "x" a la expresión que contiene "x", tal que existe por lo menos una constante que al ser substituida por "x" transforma dicha expresión en una proposición.
La denotaremos por p(x) o bien q(x) o r(x) etc.
Ejemplo: p(x) : (x > 2) ∧ (x < 4) es una proposición, puesto que al dar un determinado valor podemos afirmar si es verdadero o falso

q(x) : $(x-2)^2$ no es función proposicional, puesto que al dar cualquier valor no podemos afirmar con certeza si es verdadero o falso.

r(x) : x es múltiplo de 3 y 5 es una función proposicional, puesto que al dar un valor a x podemos afirmar si es verdadero o falso.

Solución de una función proposicional: Diremos que "c" (constante) es una solución proposicional de la expresión p(x), si al sustituir dicha constante en p(x) la transforma en una proposición verdadera.

Ejemplo: α es una raíz del polinomio p(x), es decir, al reemplazar "x" por "α" en el polinomio, este (el polinomio) se hace igual a cero, es decir, p(α) = 0

CUANTIFICADORES: Sea p(x) una función proposicional

a) CUANTIFICADOR UNIVERSAL: $(\forall\ x\ \in U): p(x)$ es una proposición que se lee "Para todo x perteneciente al Universo, la proposición p es verdadera, es decir, p(x) es verdadero.
b) CUANTIFICADOR EXISTENCIAL: $(\exists\ x\ \in U): p(x)$ es una proposición que se lee "Al menos un elemento del universo hace que la proposición p(x) sea verdadera

Obs.: Es necesario destacar un cuantificador que siendo muy utilizado no recibe un nombre especial y es $(\exists!\ x\ \in U): p(x)$ y que se lee "Existe un único elemento del Universo que hace la proposición p(x) es verdadera

Negación de Cuantificadores:

a) $\backsim (\forall\ x\ \in U): p(x) \equiv\ (\exists\ x\ \in U): \sim p(x)$
b) $\sim\ (\exists\ x\ \in U): p(x) \equiv (\forall\ x\ \in U): \sim p(x)$

Método del contraejemplo: Es muy normal utilizar un contraejemplo para probar que una proposición es falsa, el cual consiste (como su nombre lo indica) en dar un ejemplo el cual muestra que la proposición es falsa

TEORÍA BASICA DE CONJUNTOS

Cualquier colección de objetos o individuos se denomina conjunto. El término conjunto no tiene una definición matemática, sino que es un concepto primitivo. Ejemplos de conjuntos son el conjunto de los números naturales, de los televisores de la ciudad de Santiago y de los peces en el Atlántico. Nuestro objetivo será estudiar aquellos conjuntos que están relacionados con el campo de la matemática, especialmente los conjuntos numéricos.
La teoría de conjuntos es fundamental en matemática y de suma importancia en informática, donde encuentra aplicaciones en áreas tales como inteligencia artificial, bases de datos y lenguajes de programación.

1. Conjuntos y pertenencia

Un conjunto es una colección de elementos diferentes. Los objetos que integran un conjunto se llaman elementos de ese conjunto.

Ejemplos de conjuntos son los siguientes:

El conjunto de los números enteros.
El conjunto de los números naturales mayores que 5 y menores que 9.
El conjunto formado por los estudiantes de tercer año medio del Instituto Nacional
El conjunto formado por un punto P en el plano y las rectas que pasan por él.

En general usaremos letras mayúsculas para designar a los conjuntos y letras minúsculas para designar a sus elementos.
Si a es un elemento de un conjunto A se escribe a ∈ A y se lee "a pertenece al conjunto A" o "a es un elemento del conjunto A".
Si a no es un elemento del conjunto A se escribe a ∉ A y se lee "a no pertenece al conjunto A" o "a no es elemento del conjunto A".

Los símbolos $\mathbb{N}\,,\mathbb{Z}\,,\mathbb{Q}\,,\mathbb{I} \wedge \mathbb{R}$ servirán para denotar a los siguientes conjuntos:

$\mathbb{N}$: el conjunto de los números naturales = $\{0\,,1\,,2\,,3\,,\ldots\ldots..\}$

$\mathbb{Z}$: el conjunto de los números enteros = $\{\ldots.,-3\,,-2\,,-1\,,\ 0\,,1\,,2\,,3\,,\ldots\ldots\}$

$\mathbb{Q}$: el conjunto de los números racionales = $\left\{x\ /\ x=\frac{m}{n}\ con\ m\ y\ n\ \in \mathbb{Z}, n\ \neq 0, m\ y\ n\ irreductibles\ entre\ si\right\}$

$\mathbb{I}$: el conjunto de los números irracionales = $\{x\ \in\ \mathbb{R}\ /\ x\ \notin \mathbb{Q}\}$

$\mathbb{R}$: el conjunto de los números reales = $\mathbb{I}\ \cup\ \mathbb{Q}$

Sean $a\,,b\ \in \mathbb{R}\,/\,a<b$ consideremos los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}$, los que llamaremos intervalos

- $[a\,,b]=\{x\ \in\ \mathbb{R}\,/\,a\ \leq x\ \leq b\}$
- $]a\,,b[\ =\{x\ \in\ \mathbb{R}\ /\,a<x<b\}$
- $]a\,,b]=\{x\ \in\ \mathbb{R}\ /\,a<x\ \leq b\}$
- $[a\,,b[\ =\{x\ \in\ \mathbb{R}\ /\,a\ \leq x<b\}$
- $[a\,,\infty[\ =\{x\ \in\ \mathbb{R}\,/\,a\ \leq x\}$
- $]-\infty\,,b]=\{x\ \in\ \mathbb{R}\,/\,x\ \leq b\}$
- $]a\,,\infty[\ =\{x\ \in\ \mathbb{R}\ /\,a<x\}$
- $]-\infty\,,b\,[\ =\{x\ \in\ \mathbb{R}\ /\,x<b\}$
- $\mathbb{R}^{+}=\ ]0\,,\infty[\ =\{x\ \in\ \mathbb{R}\ /\,x>0\}$
- $\mathbb{R}^{-}=\ ]-\infty\,,0[\ =\{x\ \in\ \mathbb{R}\ /\ x<0\}$
- $]-\infty\,,\infty[\ =\mathbb{R}$

TEORÍA BASICA DE CONJUNTOS

Definir un conjunto es describir de una manera precisa, sin ambigüedades, cuáles son los elementos de dicho conjunto. Existen distintas maneras de definir un conjunto. La forma más simple, pero que no siempre es posible, es por extensión, es decir escribiendo todos y cada uno de los elementos del conjunto separados por comas y encerrando todo entre llaves:

A = {1, 2, 3, 5, 7},
V = {a, e, i, o},
M = {Colo colo, Cobreloa, Universidad Católica}.

El orden en el cual se enumeran los elementos del conjunto es irrelevante, y los elementos se consideran una sola vez.

EJEMPLO {1,2,3} , {3,2,1} y {1,1,2,2,2,3} describen al mismo conjunto.

En algunos casos no se escriben todos los elementos, pero se nombran los suficientes y se usan los puntos suspensivos "... "para sugerir los elementos faltantes:

EJEMPLO B = { 3 , 5 , 7 ,... }, C = {2 , 4 ,......, 24}.

Sin embargo esta forma de nombrarlos es siempre ambigua, no puede saberse de antemano qué elementos son los que se han omitido. Por ejemplo, B podría ser el conjunto de los números impares, o podría ser el conjunto de los números primos mayores que 2. Del mismo modo C podrían ser todos los pares entre 2 y 24 o bien todas las potencias de 2 comprendidas en el intervalo natural [2 , 24].

Otra forma de describir un conjunto es por comprensión, es decir, enunciando una o varias de las características comunes de sus elementos:

Ejemplo: A = {x |x cumple la propiedad P}. Esto se lee: “el conjunto de los x tales que x cumple la propiedad P.

Ejemplo: El conjunto B = {x |x es natural e impar y x = 3}

El conjunto B está formado por todos los elementos que son números naturales, impares, mayores o iguales a 3. En este caso se trata de un conjunto con un número infinito de elementos, y por lo tanto no podemos definirlo por extensión.

Ejemplo: Dado el conjunto C = {x |x es natural, $2 \leq x \leq 26 \wedge$ x es potencia de 2}

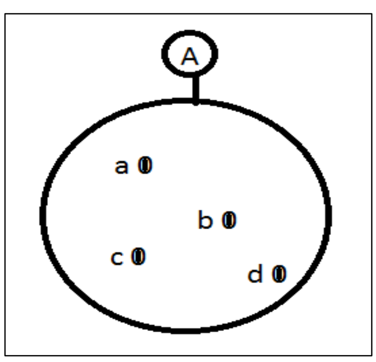
Este conjunto está formado por los elementos 2, 4, 8, 16, 32 y 64. El conjunto C se define también por extensión como:
C = {2,4,8,16,32,64}.

El conjunto vacío es un conjunto sin elementos. Se le denota con el símbolo $\emptyset$ o { }, pero no ambos a la vez.

Ejemplo: El conjunto A = {x |x > 0 y x < 0 } no tiene elementos, ya que no existe un número que sea positivo y negativo a la vez, por lo tanto este conjunto A no tiene elementos, en este caso se dice que el conjunto A es vacío y se denota por A = { } ó ϕ

Diagramas de Venn. Es frecuente utilizar ciertos graficas llamadas diagramas de Venn, para representar a los conjuntos. Un conjunto se representa con una línea curva cerrada, y sus elementos con puntos en el interior. Por ejemplo, el diagrama de Venn para el conjunto A = $\{a , b , c , d\}$ es:

En esta figura se ha representado el conjunto “A”, a través de un diagrama de VENN



2. Subconjuntos
Consideremos los conjuntos A = {1,3,5}, y B = {1,2,3,4,5}.

Como podemos apreciar, los elementos de A: 1, 2 y 3, también son elementos de B. Decimos entonces, diremos entonces que A es un sub conjunto del conjunto B, en otras palabras A está incluido en B.

Un conjunto A es un subconjunto del conjunto B si todo elemento de A es también elemento de B.
Se denota A $\subseteq$ B y se dice que A está incluido o contenido en B.

En particular, todo conjunto está incluido en sí mismo.

A = {1 , 3 , 5} está incluido en A, y lo escribimos A $\subseteq$ A.

Dos conjuntos A y B son iguales si los elementos de A son elementos de B, y viceversa.

Es decir, si A ⊆ B y también B ⊆ A. $(\forall x)[x \in A \Leftrightarrow x \in B]$

Dos conjuntos A y B son distintos si no son iguales, es decir tienen al menos un elemento que no es común

Es posible que la definición de conjuntos iguales y distintos resulta un tanto obvia, sin embargo, es necesaria y no siempre es tan sencillo detectar la igualdad de dos conjuntos.

Ejemplo: Consideremos los conjuntos A = {1 , - 3} y B = {n |n^2 - 4 n = -3}.

En principio A y B están definidos de manera diferente, por lo cual no podemos asegurar si son iguales o distintos.

Los elementos de A son 1 y -3. Notemos que 1 y -3 verifican la propiedad que define a B. En efecto $1^2 - 4 \cdot 1 = 1 - 4 = -3$ y $3^2 - 4 \cdot 3 = 9 - 12 = -3$.
Luego podemos afirmar que "A ⊆ B", Además, los elementos de "B" son los números que satisfacen la ecuación $n^2 - 4.n + 3 = 0$, y esta ecuación tiene exactamente como raíces a 1 y -3. Por lo tanto, también es cierto que todo elemento de B es un elemento de A, es decir, B ⊆ A. Concluimos entonces que A = B.

Notemos que dos conjuntos pueden ser distintos, pero tener uno o más elementos en común.
Por ejemplo, A = {2 , 4} y B = {1 , 4 , 6} son distintos pero el 4 es un elemento de ambos conjuntos.

Dos conjuntos se dicen disjuntos si no tienen ningún elemento en común.

Ejemplo: Los conjuntos C = {2 , 4 , 6} y D = {1 , 3 , 5 , 7} son disjuntos.

Si A es un subconjunto de B, pero distinto de B, se dice que A es un subconjunto propio de B. La notación A ⊂ B es correcta, pero si queremos resaltar que A y B son distintos, escribimos A ≠ B

Ejemplo: Consideremos los conjuntos A = {x |x es un natural par y x < 10}, y B = {2 , 4 , 6 , 8 , 10}.

En este caso, todo elemento de A es un elemento de B, y por lo tanto A es un subconjunto de B: A ⊆ B.

Además se cumple que 10 pertenece a B pero no pertenece a A, por lo cual A y B no son los mismos conjuntos. Decimos entonces que A es un subconjunto propio de B y lo escribimos A ⊂ B.

Ejemplo: El conjunto ℕ de los números naturales es un subconjunto del conjunto , ℤ de los números enteros, y se escribe N ⊂ , ℤ. Además ℕ es un subconjunto propio de , ℤ, ya que existen números enteros que no son naturales. Denotamos esto escribiendo ℕ ⊂ , ℤ .

El conjunto vacío está incluido en todos los conjuntos, es decir, que para todo conjunto A se verifica que ∅ ⊆ A.

Si además A no es el conjunto vacío, podemos afirmar que ∅ ⊂ A.

Intervalos de números reales es un subconjunto de números reales. Un intervalo de ℝ, que se identifica en la recta real con un segmento o una semirrecta, con o sin sus extremos.

Ejemplo: El conjunto {x |2 ≤ x ≤ 8}, es un intervalo, que se representa en la recta real como un segmento con extremos 2 y 8.

Ejemplo: El conjunto {x |x > - 5} es un intervalo, que se representa en la recta real como una semirrecta, con origen en - 5, sin contar este extremo.

Para los intervalos se utiliza una notación específica, y se los clasifica además en intervalos cerrados, abiertos y semiabiertos.

El intervalo cerrado [a , b], con a y b números reales, es el subconjunto de ℝ definido como

[a , b]= {x |a ≤ x ≤ b}. En particular, a y b son elementos de [a , b].

El intervalo abierto (a , b), con a y b números reales, es el subconjunto de $\mathbb{R}$ definido como

(a , b)= {x |a < x < b}.En este caso, a y b no son elementos de (a , b).

Los subconjuntos de la forma {x |x > a} y   {x |x < a}, también se llaman intervalos abiertos, y para estos se utiliza la notación (a , ∞) y (- ∞ , a), respectivamente. Al símbolo ∞ se le denomina símbolo de infinito. El conjunto $\mathbb{R}$ es también un intervalo abierto, que se denota $(-\infty, \infty)$.

Por ´ultimo, los intervalos semiabiertos se denotan de la forma [a , b), (a , b], [a , 8) y (- 8 , a], siendo a y b números reales. Se definen por comprensión de la siguiente manera:

[a , b) = {x |a $\leq$ x < b}
(a , b] = {x |a < x $\leq$ b}
[a , ∞) = {x |x $\geq$ a}
($-\infty$, a] = {x |x $\leq$ a}

Ejemplo Si a = - 2, y b = 3, entonces [-2,3) = {x |- 2 $\leq$ x < 3}, y (-2,3] = {x |-2 < x $\leq$ 3}.

Ejercicio: determine el intervalo correspondiente 5 $\leq$ x $\leq$ 5. ¿Cuántos elementos tiene este intervalo?. Y ¿como se representa en la recta real?

CONJUNTO UNIVERSAL

En el conjunto Universal No necesariamente sus elementos son de la misma naturaleza, por ejemplo, el conjunto C formado por la Torre Eiffel y el número 5 es válido como conjunto. Sin embargo, es muy poco interesante en la teoría. En general nos referiremos a conjuntos cuyos elementos tienen una propiedad en común.

Ejemplo 1: A = {x |x es un natural par}, B = {x |x es un natural mayor que 4} y C = {x |x es un natural menor que 23}, son conjuntos cuyos elementos son números naturales.

Ejemplo 2: Los elementos de los conjuntos X, Y y Z, donde X = {cuadrado, rectángulo, rombo},
Y = {triángulo, hexágono}
y Z = {decágono, eneágono, octógono, heptágono}
tienen la propiedad de ser polígonos.

Resulta entonces conveniente considerar un conjunto que contenga a todos los conjuntos que se estén considerando. A dicho conjunto se lo denomina conjunto universal, y lo denotamos con la letra U.

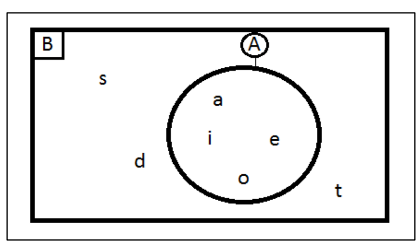
En el Ejemplo 1 todos los conjuntos son subconjuntos de $\mathbb{N}$, y podemos considerar a $\mathbb{N}$ como conjunto universal:

Notemos que A, B y C son también subconjuntos del conjunto $\mathbb{Z}$ de números enteros, por lo que también podría fijarse el conjunto universal como $\mathbb{Z}$ .Es por esto que se hace conveniente siempre fijar el conjunto Universal.

En el ejemplo podemos denotar con P al conjunto formado por todos los polígonos, o bien al conjunto formado por R = {cuadrado, rectángulo, rombo, triángulo, hexágono, decágono, eneágono, octógono, heptágono}.

Representación del conjunto A mediante un diagrama de Venn.

En un diagrama de Venn el conjunto universal se denota generalmente con un rectángulo, y el conjunto que nos interesa representar, digamos A, se denota con una curva cerrada dentro del rectángulo.
Por ejemplo: Sea A = $\{a , e , i , o \}$ y el conjunto universal el conjunto
B = $\{x \ / \ \ x \text{ } es\ una\ letra\ de\ la\ palabra\ ESTADIO\}$
El diagrama de VENN quedaría determinado por



Una de las propiedades más útiles de los diagramas de Venn es que dan una forma gráfica de la visualización de las relaciones entre conjuntos, por ejemplo, en la Figura representamos que todo elemento de A, es también elemento de B, por lo tanto podemos afirmar con toda propiedad que A $\subseteq$ B

Cuando en un diagrama de Venn se desea enfatizar un conjunto, es usual sombrear el interior de la curva cerrada que lo denota.

Cardinalidad: Si un conjunto A tiene una cantidad finita de elementos, diremos que es un conjunto finito y llamaremos cardinal de A al número de elementos de A. El cardinal del conjunto vacío es 0, y si el conjunto tiene una cantidad no finita de elementos diremos que es un conjunto infinito y que su cardinal es infinito. En todos los casos, el cardinal del conjunto A se denota |A|o también #A.

Ejemplo: 1.) Si A = {a,b,c,5,4}, entonces # A = 5.
2.) Si B = {n |n ∈ N ∧ n^2 = 2}, entonces # B = 0.
3.) Si C = {a , a , b}, entonces # C = 2.

Conjunto Potencia:
El conjunto Potencia de un conjunto A es el conjunto formado por todos los subconjuntos de A y lo denotamos $\mathcal{P}$ (A).

Ejemplo: Dado A = {1, 2, 3} entonces $\mathcal{P}$ (A) = {∅ , {1} , {2} , {3} , {1 , 2} , {1 , 3} , {2 , 3} , {1 , 2 , 3}}.

Ejemplo: Dado B = { a } entonces $\wp$(B) = {Ø , B} = {Ø , {a}}.
Ejemplo: Si $\wp$(N) = {Ø , {1} , {2} , {3} ,..., {1 , 2} , {1 , 3} ,..., {2 , 3} ,... }, tiene infinitos elementos.
Ejemplo: Si A = $\phi \implies \wp(A) = \{\phi\}$

Si A es un conjunto finito, digamos de n elementos, entonces el cardinal del conjunto potencia de A tendrá n^2 elementos

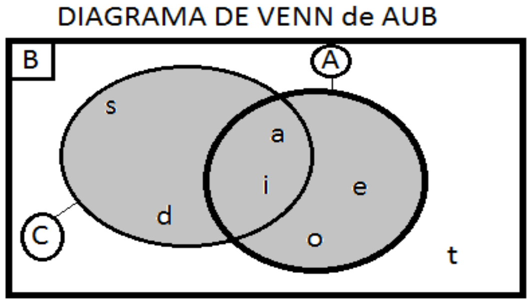
OPERACIONES ENTRE CONJUNTOS

Así como pueden definirse diversas operaciones entre números, también existen operaciones entre conjuntos. El resultado de una operación entre conjuntos es a su vez un conjunto.
Fijemos un conjunto universal U y consideremos todos los subconjuntos de U. Entre estos conjuntos están definidas las operaciones de unión, intersección y diferencia. Además, para cada conjunto se define el complemento. El resultado de cada una de estas operaciones es un subconjunto de U.

UNION DE CONJUNTOS

Sean Ay B dos conjuntos. Se define la unión $A \wedge B$ o de A con B al conjunto cuyos elementos pertenecen a A o pertenecen a B y se denota por ∪. Por comprensión, la unión entre los conjuntos A y B se define así:
$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ o } x \in B\}$
En particular, A y B son subconjuntos de $A \cup B$, pues todos los elementos de A y todos los elementos de B pertenecen a $A \cup B$.
En un diagrama de Venn representamos la unión de dos conjuntos sombreando el área que cubren ambos conjuntos

DIAGRAMA DE VENN de AUB



Si A es un subconjunto de B, es decir, $A \subseteq B$, entonces $A \cup B = B$.

Ejemplo: si A = {x |x es múltiplo de 5} y B = {x |x es múltiplo de 10}, entonces $A \cup B$ = {x |x es múltiplo de 5 }, dado que todo número múltiplo de 10 es también múltiplo de 5. En este caso, $A \cup B = B$
La unión de un conjunto A con el conjunto vacío es el mismo conjunto A, puesto que Ø no tiene elementos:
La unión de un conjunto A con A es el mismo conjunto A: $A \cup A = A$

INTERSECCION DE CONJUNTOS

Sean Ay B dos conjuntos.

La intersección $(A \cap B)$ entre A y B es el conjunto cuyos elementos pertenecen a A "y" pertenecen a B.
Por comprensión, la intersección de los conjuntos A y B se define como $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ y } x \in B\}$.
Ejemplo: Dados $U = \mathbb{N}$, A = {n |n = 11} , P = {n |n es primo} y B = {n |n es impar y $n \leq 20$}, entonces

$A \cap B = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$ $A \cap P = \{2, 3, 5, 7, 11\}$ $B \cap P = \{3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$

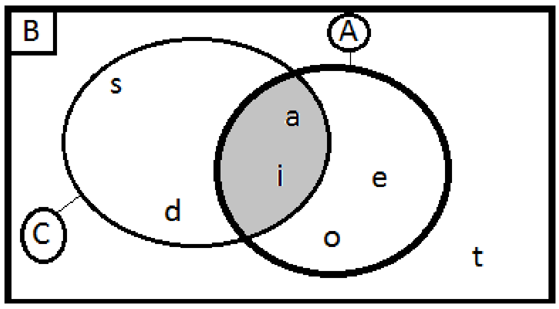
Ejemplo: Si consideramos los intervalos [0,5) y (3,6], entonces $[0, 5) \cup (3, 6] = [0, 6]$ y $[0, 5) \cap (3, 6] = (3,5)$.

Si A es un subconjunto de B, esto es $A \cap B$, entonces $A \cap B = A$.
En particular: $A \cap A = A$ y $A \cap \emptyset = \emptyset$.

Ejemplo: La intersección del intervalo (0,1) con el conjunto {0,1} no tiene elementos, es decir, es el conjunto vacío, entonces diremos que estos dos conjuntos son conjuntos disjuntos, en palabras, dos conjuntos son disjuntos si y sólo si su intersección es vacía.

INSTITUTO NACIONAL
Gral. José Miguel Carrera
Departamento de matemática
Prof.: Eugenio López Torres
Prof. Sr.: Juan Carlos Costa Lazcano
2017

DIAGRAMA DE VENN de $A \cap B$

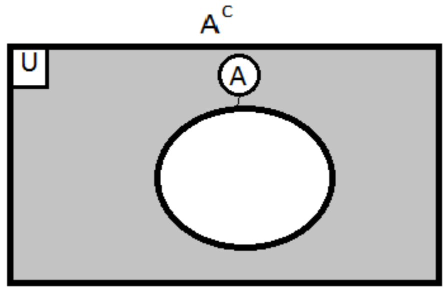


En un diagrama de Venn la intersección de dos conjuntos se representa por la región que está determinada por el interior de las curvas cerradas que determinan los conjuntos. Esta región se la destaca con un sombreado o subrayado. Obsérvese que la intersección de dos conjuntos es vacía si y solo si no hay elementos comunes entre ellos. Esto se grafica con dos curvas cerradas que no se cortan.

COMPLEMENTO DE UN CONJUNTO

Fijemos U un conjunto universal y A un subconjunto de U.El complemento de A con respecto a U es el conjunto cuyos elementos son todos los elementos de U que no pertenecen a A y se denota por A^c, A'
En símbolos, $A^c = \{ x \mid x \in U \ \wedge x \notin A\}$.
En un diagrama de Venn el complemento de A es la región exterior de la curva cerrada que determina A y lo destacamos con un subrayado o sombreado.

A^c



Ejemplo: Si U = $\mathbb{N}$ y P es el conjunto de los números pares, entonces P^c es el conjunto de los números naturales impares.
Ejemplo: Si U es un plano, y P es un punto en el plano, entonces P^c es el plano sin el punto P.
Ejemplo: Si U = $\mathbb{Z} \implies \mathbb{Z}^c = \phi$

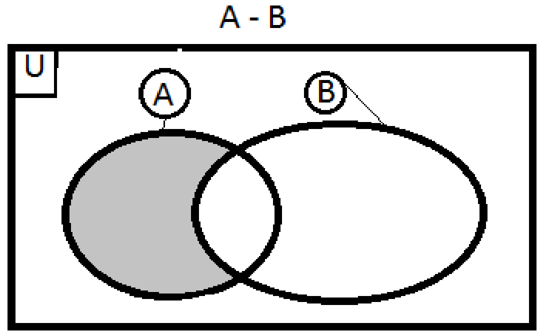
DIFERENCIA

Sean Ay B dos conjuntos. La diferencia o complemento relativo A - B entre A y B es el conjunto de todos los elementos que pertenecen a A y no pertenecen a B.

$A - B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$

Observación: $A^c = U - A$. En un diagrama de Venn representamos la diferencia entre los conjuntos Ay B, destacando la región que es interior a A y exterior a B

A - B



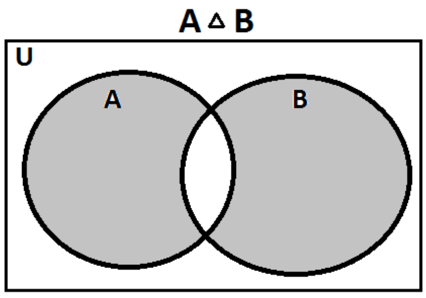
Ejemplo: $\mathbb{Z} - \mathbb{N} = \{n \mid n \in \mathbb{Z}^- - \{0\}$

Ejemplo: [-1 , 1] - {0} = [-1,0) ∪ (0,1]

DIFERENCIA SIMETRICA

Sean Ay B dos conjuntos. La diferencia simétrica (A ∆ B) entre A y B es el conjunto de todos los elementos que pertenecen a A y pertenecen a B, pero que NO pertenecen a la intersección entre ambos conjuntos.

.



PROPIEDADES DE LAS OPERACIONES. Resumimos a continuación las propiedades que cumplen las operaciones de unión, intersección y complementación:

Propiedad conmutativa :

A ∪ B = B ∪ A

A ∩ B = B ∩ A.

Propiedad asociativa

(A ∪ B) ∪ C = A ∪ (B ∪ C)

(A ∩ B) ∩ C = A ∩ (B ∩ C)

Propiedad distributiva

A ∪ (B ∩ C) = (A ∪ B) ∩ (B ∪ C)

A ∩ (B ∪ C) = (A ∩ B) ∪ (B ∩ C)

Leyes de Morgan

$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

Propiedades generales: $A \cup \phi = A$; $A \cap \phi = \phi$; $A \cup U = U$; $A \cap U = A$; $A \cup A^c = U$; $A \cap A^c = \phi$; $\phi^c = U$; $U^c = \phi$; $(A^c)^c = A$

Ejemplo: Sea U = {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9}, y sean A = {0,2,4,6,8}, B = {0,3,6,9} y C = {1,3,5,7,9}. Entonces,

(A ∩ B) ∪ (A ∩ C) = {0,6} ∪ ∅ = {0,6}

A ∩ (B ∪ C) = {0,2,4,6,8} ∩ {0,1,3,5,6,7,9} = {0,6},

(A ∪ B) ∩ (A ∪ C)= {0,2,3,4,6,8,9} ∩ {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9} = {0,2,3,4,6,8,9},

A ∪ (B ∩ C) = {0,2,4,6,8} ∪ {3,9} = {0,2,3,4,6,8,9}.

Ejemplo: Si A, B y U son como en el Ejemplo anterior, entonces $(A \cup B)^c = \{0,2,3,4,6,8,9\}^c = \{1,5,7\}$ y

$A^c \cap B^c = \{1,3,5,7,9\} \cap \{1,2,4,5,7,8\} = \{1,5,7\}$.

$(A \cap B)^c = \{0,6\}^c = \{1,2,3,4,5,7,8,9\}$ y $A^c \cap B^c = \{1,3,5,7,9\} \cap \{1,2,4,5,7,8\} = \{1,2,3,4,5,6,8,9\}$

Destacamos que en estos ejemplos sólo hemos hecho una comprobación en un caso particular, y no es suficiente para demostrar que la misma se cumple para cualquier par de conjuntos Ay B.

Ejercicios:

1.-) Determinar si los siguientes enunciados constituyen o no una proposición o sentencia

1.1.-) Daniel es el mejor alumno del curso
1.2.-) Matemática es una ciencia blanca
1.3.-) la millonésima cifra en el desarrollo del decimal π es 7
1.4.-) Hola que tal marcha todo
1.5.-) $2 + 2 = 3$
1.6.-) $2x - 18 < 25$
1.7.-) Ella se llama Elizabeth

2.-) A continuación se presentan dos columnas indicar si la proposición que se encuentra a la izquierda es la negación de la que se encuentra a la derecha, en caso que no lo sea escribir correctamente la negación que le corresponde.

2.1.-) La pizarra es negra .... La pizarra es blanca
2.2.-) 4 es divisor de 8 .... 4 no es divisor de 8
2.3.-) La cardinalidad del conjunto A es 1............... El conjunto A es vacío
2.4.-) El conjunto A es vacío.................................... El conjunto A tiene al menos un elemento
2.5.-) $a = b$ .... $a > b$
2.6.-) $a \geq b$ .... $a < b$

3.-) Dados $a, b \wedge c \in \mathbb{R}$, sabiendo que; $p: a < b$, $q: b < c$, $r: a < c$ escribir simbólicamente (metalenguaje) las expresiones dadas a continuación.

3.1.-) $a < b < c$
3.2.-) ($a = b$ y $b < c$) ó $a = c$
3.3.-) No es cierto que $[a < b \text{ y } (a < c \text{ ó } b < c)]$ ó $(a = b \text{ y } a < c)$

4.-) Sean p, q, r las proposiciones siguientes:

p: " está lloviendo"
q: "el sol está brillando"
r: "hay nubes en el cielo".
Traduzca lo siguiente a notación lógica, utilizando p, q, r y conectivos lógicos.

4.1.-) Está lloviendo y el Sol está brillando".
4.2.-) Si está lloviendo , entonces hay nubes en el cielo.
4.3.-) Si no está lloviendo, entonces el Sol no está brillando y hay nubes en el cielo.
4.4.-) El Sol está brillando si y sólo si no está lloviendo.
4.5.-) Si no hay nubes en el cielo, entonces el Sol está brillando.

5.-) Dados p, q y r como en el ejercicio anterior. Traduzca lo siguiente a oraciones en español.
5.1.-) $(p \vee q) \Longrightarrow r$
5.2.-) $\sim (p \Longrightarrow (q \vee r)$
5.3.-) $(p \Longrightarrow r) \vee q$
5.4.-) $\sim (p \Longrightarrow (q \vee r))$
5.5.-) $\sim (p \vee q) \Longrightarrow r$

6.-) Supongamos que todos los días que llueve Juan usa paraguas. ¿Cuáles de las siguientes proposiciones puedes asegurar que son verdaderas y cuáles no puedes asegurar?
6.1.-) Si llueve entonces Juan usa paraguas.
6.2.-) Si Juan usa paraguas entonces llueve.
6.3.-) Si Juan no usa paraguas entonces no llueve.
6.4.-) Si no llueve entonces Juan no usa paraguas.
6.5.-) Si no llueve entonces Juan usa paraguas.

7.-) Escriba la recíproca, la contrarrecíproca y la inversa de cada una de las siguientes implicaciones:

7.1.-) Si 4 es par entonces $1 > 0$.
7.2.-) $2+3 = 5$ si $1+1 < 3$.
7.3.-) Si 4 es impar entonces $1 > 0$.

7.4.-) Si 1+1 < 3 entonces 2 = 4.

8.-) Determine los valores de verdad de las siguientes proposiciones compuestas.

8.1.-) Si 2+2 = 4 entonces 2+4 = 8.
8.2.-) Si 2+2 = 5 entonces 2+4 = 8.
8.3.-) Si 2+2 = 4 entonces 2+4 = 6.
8.4.-) Si 2+2 = 5 entonces 2+4 = 6.

9.-) Suponiendo que p ⟹ q es falso, indica los valores de verdad para

9.1.-) $p \vee q$
9.2.-) $p \wedge q$
9.3.-) $q \Leftrightarrow p$

10.-) Sabiendo que "p" y "q" son verdaderos y "r" y "s" son falsos, determinar los valores de verdad de las siguientes

10.1.-) $p \wedge (q \vee r)$
10.2.-) $[p \vee (q \wedge r)]$
10.3.-) $\sim [(p \wedge q) \vee (r \wedge s)]$
10.4.-) $[\sim (p \wedge q) \vee \sim r] \wedge [\{(\sim p \wedge q) \vee \sim r\} \vee s]$
10.5.-) $[(\sim p \wedge q) \vee \sim r] \vee [\{(\sim p \vee q) \wedge \sim r\} \vee s]$

11.-) Comprobar utilizando las tablas de verdad las propiedades distributivas de la conjunción y la disyunción inclusiva con respecto a la disyunción inclusiva y la conjunción respectivamente, y las leyes de DE MORGAN

12.-) Utilizando tablas de verdad verifique si son Tautologías, Contradicción o Contingencia las siguientes proposiciones compuestas: ***OJO AGREGAR EJERCICIOS DE CONTRADICCION Y CONTINGENCIA***

12.1.-) $\big((\sim p) \vee q\big) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q)$
12.2.-) $[(\sim q) \Rightarrow (\sim p)] \Leftrightarrow (p \Rightarrow q)$
12.3.-) $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow [(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)]$
12.4.-) $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow \{[(\sim p) \wedge (\sim q)] \vee (p \wedge q)\}$
12.5.-) $[\{p \Rightarrow (\sim q)\} \wedge (r \Rightarrow q)] \Rightarrow [p \Rightarrow (\sim r)]$
12.6.-) $\{[p \Rightarrow (\sim q)] \wedge (r \Rightarrow q)\} \Rightarrow [\sim p \Rightarrow (\sim r)]$

13.--) De acuerdo a las siguientes proposiciones:

p : estudio
q: apruebo matemática
r: Seré coordinador de la asignatura en mi curso

Escribir en lenguaje matemático (simbólicamente) las siguientes oraciones

13.1.-) Estudio o no apruebo matemática
13.2.-) No estudio ni apruebo matemática
13.3.-) Es falso que estudio y pruebo matemática
13.4.-) Estudio pero no apruebo matemática
13.5.-) Si no estudio no seré coordinador de la asignatura en matemática

14.-) Para las siguientes proposiciones compuestas, elabore las tablas de verdad correspondientes:

14.1.-) $\sim (p \wedge q)$
14.2.-) $\sim (p \vee q)$
14.3.-) $(p \Rightarrow q) \vee [(p \wedge \sim q) \Rightarrow (p \vee q)]$
14.4.-) $[(p \wedge q) \Rightarrow r] \Leftrightarrow (p \vee \sim q)$

14.5.-) $[(p \Longrightarrow q) \wedge (p \vee r)] \Leftrightarrow (\sim q \vee p)$
14.6.-) $[\sim (p \wedge q)] \Leftrightarrow (r \wedge \sim p)$
14.7.-) $(p \vee q) \Leftrightarrow [(\sim p \wedge q) \vee (p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge \sim q]$

15.-) De acuerdo a las siguientes proposiciones p: Tara es millonaria y q: Nicolás es feliz.Escribir en lenguaje matemático (simbólicamente) las siguientes oraciones

15.1.-) $p \vee q$
15.2.-) $q \Longrightarrow p$
15.3.-) $q \Leftrightarrow \sim p$
15.4.-) $\sim(\sim p)$
15.5.-) $p \wedge q$
15.6.-) $p \vee (\sim q)$
15.7.-) $(\sim p) \Longrightarrow q$
15.8.-) $[(\sim p) \wedge q] \Longrightarrow p$

16.-) Tomando como universo del discurso a los animales, traduzca a un lenguaje lógico las siguientes expresiones, definiendo funciones proposicionales adecuadas y un cuantificador.

16.1.-) Todos los leones son predadores.
16.2.-) Algunos leones viven en Africa.
16.3.-) Sólo rugen los leones.
16.4.-) Algunos leones comen cebras.
16.5.-) Algunos leones sólo comen cebras.

17.-) . Usando como universo de discurso a los naturales, traduzca las siguientes frases. Utilice P(x) para denotar x es primo y Q(x) para denotar x es par, y los símbolos < y >.
17.1.-) Algunos primos son pares.
17.2.-) Todos los números pares son mayores que 1.
17.3.-) Los números pares son primos solamente si son menores que 3.
17.5.-) No hay primos menores que 3.

18.-) Determine la verdad o falsedad de los siguientes juicios (el conjunto Universo es el conjunto de los Enteros)
18.1.-) Para todo x: Si $x^2 = 9$ entonces x = 3
18.2.-) Para todo x: Si (x + 1) (x – 3) = 0 entonces x = 3
18.3.-) Para todo x: Si 3 x – 2 = x + 4 entonces 3 x = 9
18.4.-) Para todo x: Si x + 5 = 7 entonces $x^2 = 4$

19.-) Determine la proposición recíproca, contraria y contrarrecíproca de las implicaciones dadas:
19.1.-) Para todo entero: Si x es divisible por 3, entonces 2 x es divisible por 6
19.2.-) Para todo entero x: Si $x \neq 0$ entonces x^2 es mayor que cero
19.3.-) Para todo triángulo T: Si T es equilátero entonces T es isósceles
19.4.-) Para todo cuadrilátero Q: Si Q es paralelogramo entonces las diagonales se dimidian

20.-) Escriba la implicación dada usando el lenguaje de CONDICIÓN SUFICIENTE
20.1.-) Si los ángulos basales de un triángulo son iguales, el triángulo es isósceles
20.2.-) Si dos triángulos son congruentes, sus alturas correspondientes son iguales
20.3.-) Si dos rectas son perpendiculares a la misma recta, ellas son paralelas
20.4.-) Si 3 x + 2 = x + 4 entonces x = 1
20.5.-) Si $x^2 = 0$ entonces x = 0

21.-) Escriba la implicación dada usando el lenguaje de CONDICIÓN NECESARIA
21.1.-) Si un triángulo está inscrito en una semicircunferencia, entonces es un triángulo rectángulo
21.2.-) Si x = 3 entonces $x^2 = 9$
21.3.-) Si un cuerpo está en equilibrio estático, el vector suma de todas las fuerzas que actúan en él es 0

22.-) Niegue las siguientes proposiciones
22.1.-) $\overline{p \vee q}$

22.2.-) $\overline{p} \wedge \overline{q}$
22.3.-) $p \implies \overline{q}$
22.4.-) $(q \vee \overline{p}) \implies r$
22.5.-) $p \implies (q \wedge r)$
22.6.-) $(q \wedge r) \implies p$
22.7.-) $\overline{p} \iff q$
22.8.-) $p \vee (q \wedge r)$
22.9.-) $p \veebar q$
22.10.-) $\overline{\overline{p} \wedge (q \vee \overline{r})}$
22.11.-) $(p \implies \overline{q}) \vee \overline{p}$

23.-) Niegue verbalmente los siguientes enunciados
23.1.-) Si un número entero $p \neq 0 \neq -1 \neq 1$ tiene sólo divisores triviales, es un número primo
23.2.-) Un cuadrilátero es un paralelogramo si y sólo si tiene sus lados opuestos paralelos

24.-) Verifique por medio de tablas de verdad si las siguientes proposiciones son tautologías, contradicción o

TERMINAR Y AGREGAR EJERCICIOS DE SIMPLIFICACION UTILIZANDO PROPIEDADES

25.-) Define por extensión cada uno de los siguientes conjuntos, usando la notación …... cuando sea necesario:
25.1.-) {x |x es entero y -3 < x < 4}
25.2.-) {x |x es entero positivo y x es múltiplo de 3}
25.3.-) {x |(3x -1)(x +2) = 0}
25.4.-) {x |x es un entero y (3x -1)(x +2) = 0}
25.5.-) {x |2x es entero positivo}

26.-) Enumera cinco elementos de cada uno de los siguientes conjuntos:
26.1.-) {n |n es natural y n es divisible por 5}
26.2.-) {n |n es primo }
26.3.-) {2n|n es natural}
26.4.-) {r |r es racional y 0 < r < 1}

27.-) Describe por extensión cada uno de los siguientes conjuntos o escribe Ø si son vacíos:
27.1.-) {n |n ∈ ℕ $\wedge n^2$ = 9}
27.2.-) {x |x ∈ ℝ ∧ x^2 = 9}
27.3.-) {n |n ∈ ℤ ∧ - 3 < |n|< 7}
27.4.-) {x |x ∈ ℝ, x < 1 y x = 2}
27.5.-) {x |x ∈ Q, x^2 = 3 }
27.6.-) {3n +1 |n ∈ ℕ y n = 6}.

28.-) Escribe por extensión los siguientes conjuntos
28.1.-) Sea X = {0,1,2}.
28.2.-) {z |z =2x y x ∈ X}
28.3.-) {z |z = x + y, donde x e y son elementos de X}
28.4.-) {z |z ∈ X o -z ∈ X}
28.5.-) {z |x = z + y, donde x e y son elementos de X}
28.6.-) {z |z es entero y z^2 ∈ X}

29.-) Determina la cardinalidad de cada uno de los siguientes conjuntos:
29.1.-) {x |x es entero y 1/8 < x < 17/2}
29.2.-) {x |x ∈ ℝ}
29.3.-) {x |x ∈ ℝ ∧ x^2 = 1 ∨ 2 $x^2 = 1$}
29.4.-) {a , b , c , {a , b , c}}
29.5.-) {a , {b , c} , {a , b , c}}

30.-) Escribe por comprensión los siguientes conjuntos:
30.1.-) El conjunto de todos los enteros que pueden ser escritos como suma de cuadrados de dos enteros.
30.2.-) El conjunto de todos los enteros menores que 1000 que son cuadrados perfectos.
30.3.-) El conjunto de todos los números que son múltiplos enteros de 13.
30.4.-) {a, e, i , o , u }

31.-) En cada uno de los siguientes casos establece si x ∈ A ∨ x ⊆ A ∨ ambas cosas o ninguna:
31.1.-) x = {1} ∧ A = {1, 2, 3}
31.2.-) x = {1} ∧ A = {{1}, {2}, {3}}
31.3.-) x = {1} ∧ A = {1, 2, {1, 2}}
31.4.-) x = {1,2} ∧ A = {1, 2, {1, 2}}
31.5.-) x = {1} ∧ A = {{1, 2, 3}}
31.6.-) x =1 ∧ A = {{1}, {2}, {3}}

32.-) En cada uno de los siguientes casos, muestra que A ⊆ B, es decir, que todo elemento de A es un elemento de B.
32.1.-) A = {x |$2x^2 + 5x = 3$} ∧ B = {x |$2x^2 + 17x + 27 = 18$}
32.2.-) A = {x |x es entero positivo y x es par } ∧ B = {x |x es entero positivo y x^2 es par }
32.3.-) A = {x |x es entero y x es un múltiplo de 6} ∧ B = {x |x es entero y x es múltiplo de 3}

33.-) Escribe por extensión el conjunto Potencia de cada uno de los siguientes conjuntos y calcula su cardinal:
33.1.-) A = {1}
33.2.-) B = {a, b}
33.3.-) S = {1, 2, 3}
33.4.-) C = {1, a, x, w}.

35.-) Si U = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10} es el conjunto universal y A = {1, 4, 7, 10}, B = {1, 2, 3, 4, 5}, C = {2, 4,6, 8}, defina por extensión los siguientes conjuntos:
35.1.-) A ∪ B
35.2.-) B ∩ C
35.3.-) A - B
35.4.-) A △ B
35.5.-) A ∪ ∅
35.6.-) A^c
35.7.-) A ∩ (B ∪ C)
35.8.-) U^c
35.9.-) (A ∩ B) ∪ C
35.10.-) $[(B \cap U) \triangle (A \cap B)] - C$
35.11.-) $[Bc \cap (C - A)] \cap [(C - A) \cup (C - B)]$
35.12.-) $(A \cap B)^c \cap C$

36.-) De un total de 60 alumnos de un colegio: 15 estudian francés solamente, 11 estudian francés e inglés; 12 estudian alemán solamente; 8 estudian francés y alemán; 10 estudian inglés solamente; 5 estudian inglés y alemán; y 3 los tres idiomas.
Determina:
36.1.-) ¿Cuántos no estudian ningún idioma?
36.2.-) ¿Cuántos estudian alemán?
36.3.-) ¿Cuántos estudian alemán e inglés solamente?
36.4.-) ¿Cuántos estudian francés?

37.-) Escriba en la recta numérica cada una de las siguientes proposiciones en $\mathbb{R}$:
27.1.-) Intersección de dos conjuntos distintos,
37.2.-) Diferencia de dos conjuntos,
37.3.-) Complemento de un conjunto.

38.-) Utilizando las propiedades de asociatividad, conmutatividad y distributividad de la unión y la intersección, y las Leyes de Morgan, compruebe las siguientes identidades. Ilustre cada caso con un diagrama de Venn. Recuerde que A - B = A ∩ B^c
38.1.-) $(A^c \cap B)^c = A \cup B^c$
38.2.-) $(A \cap B) \cup (A \cap B^c) = A$
38.3.-) $A \cap (B \cup A)^c = \phi$

38.4.-) (A ∪ B) ∩ (A ∪ B^c) = A
38.5.-) (A - B) - C = (A - C) - (B - C)

39.-) Simplifique la expresión de modo que A, B y C aparezcan a lo sumo una vez:
39.1.-) $((A^c \cup C^c) \cap B)^c \cup (A \cup (C \cap B)^c \cup C)^c$
39.2.-) $(A \cup (B \cup C)^c)^c \cap (A^c \cup (B \cap C)^c)^c$

PRODUCTO CARTESIANO

1. Pares ordenados y producto cartesiano
Dos elementos dados en cierto orden forman un par ordenado. Por ejemplo, un punto geográfico está determinado por las coordenadas latitud y longitud, una fecha en el año está dada por dos números: el mes y el día. En general, si x e y son dos objetos, se puede formar el par ordenado de x e y, y este par se denota como (x , y). De esta manera, la fecha (10,03) significa "3 de octubre", mientras que (03,10) indica el "10 de marzo". Como vemos, el orden en que se dan los elementos es relevante.
Los elementos que forman un par ordenado pueden o no pertenecer a un mismo conjunto. Por ejemplo, en el caso de las fechas, el primer elemento del par es un número natural entre 1 y 12, mientras que el segundo es un natural entre 1 y 31.
Pero también podemos formar los pares ordenados de la forma (apellido, nro. de documento), donde el primer elemento del par es un apellido tomado de un conjunto de personas, y el segundo elemento del par es un número. En este caso, los elementos del par son de distinta naturaleza.

Sean Ay B dos conjuntos no vacíos. El conjunto de todos los pares ordenados tales que el primer miembro del par ordenado es un elemento de A y el segundo miembro es un elemento de B , se llama el producto cartesiano de A por B y se escribe A× B.
En símbolos, A× B = {(x,y) |x ∈ A y b ∈ B}.

Ejemplo 1. Si A = {2,4,6} y B = {4,5,6}, el producto cartesiano de A por B es:
A × B = {(2,4), (2,5), (2,6), (4,4), (4,5), (4,6), (6,4), (6,5), (6,6)}
Ejemplo 2. Si A = { a , b } y B = {1, 2, 3}, entonces:
A × B = {(a , 1) , (a ,2) , (a , 3) , (b , 1) , (b , 2) , (b , 3)}
B × A = {(1 , a) , (1 , b) , (2 , a) , (2 , b) , (3 , a) , (3 , b)}
A × A = $\{(a , a) , (b , b), (a , b) , (b , a)\}$)}
B ×B = {(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3)}.

Si los conjuntos tienen una cantidad finita de elementos puede resultar útil el uso de una tabla de doble entrada, como la siguiente:

B/A	x_0	x_1
y_0	(x_0, y_0)	(x_1, y_0)
y_1	(x_0, y_1)	(x_1, y_1)
y_2	(x_0, y_2)	(x_1, y_2)

Así, en la tabla del producto cartesiano X × Y de dos conjuntos finitos X e Y, tenemos que la fila correspondiente al elemento x de X contiene todos los pares ordenados de X × Y cuya primera coordenada es x, mientras que la columna correspondiente al elemento y de Y contiene todos los pares ordenados de X × Y cuya segunda coordenada es y.

Si Ay B son conjuntos finitos, entonces el número de elementos de A × B es el número de elementos de B por el número de elementos de A

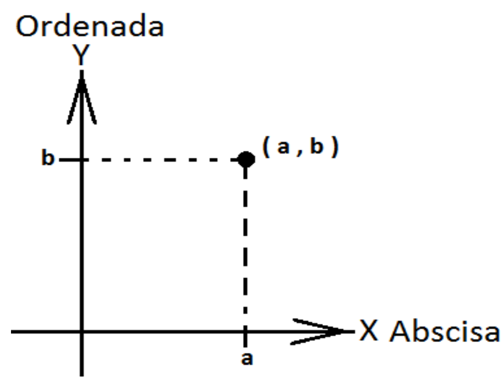
2. Representación en ejes cartesianos: Si los conjuntos A y B son subconjuntos de los números reales, entonces resulta útil la representación gráfica del producto cartesiano en ejes cartesianos. Los ejes cartesianos están formados por dos rectas perpendiculares, donde una de ellas representa el eje de las abscisas y el otro el eje de las ordenadas. En ambas rectas se representan los números reales y el punto de intersección de ambas corresponde usualmente al origen de coordenadas, en el sentido que corresponde al 0 en ambos ejes. Al lado de cada eje se deja indicada una letra que sugiere qué coordenada se representa en dicho eje. Las "flechas" dibujadas indican el sentido creciente en cada una de las rectas (Figura 1).
Dado un punto P en el plano, trazamos las rectas perpendiculares a cada uno de estos ejes por el punto P. Los puntos de intersección de cada una de estas rectas con los ejes de las abscisas y de las ordenadas se denominan abscisa y ordenada del punto P, respectivamente, o también primera y segunda coordenada. De este modo, cada punto P del

plano está en correspondencia con un par ordenado (x , y), donde x es la abscisa de P e y es la ordenada. A su vez, a cada par ordenado (a , b) le corresponde un punto del plano cuya abscisa es a y cuya ordenada es b.

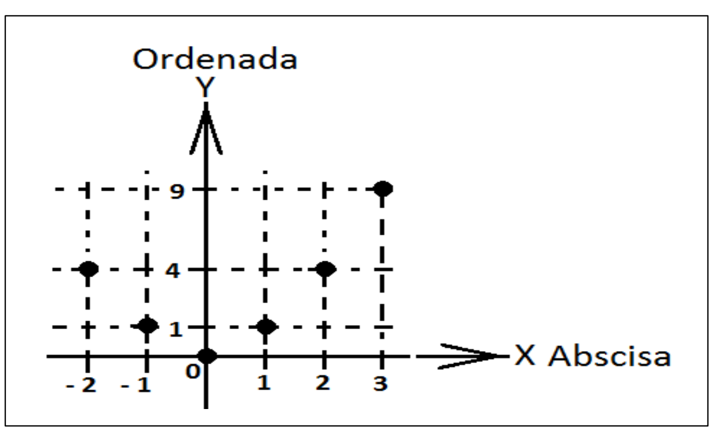
Un par ordenado (a , b) se define por (a , b) ≡ $\{\{a\},\{a\ ,b\}\}$. De esta definición puede probarse la propiedad de "orden", es decir, (a , b) = (c , d) ⟺(a = c ∧ b = d).

Obs.: El concepto de producto cartesiano puede extenderse a cualquier número finito de conjuntos en una forma natural, por ejemplo el conjunto producto cartesiano de los conjuntos $A_1, A_2, A_3, \ldots\ldots\ldots, A_n$ es el conjunto formado por todas las n-uplas $(a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots\ldots, a_n)$, donde $a_i \in A_i, \forall i = 1\ ,2\ , \ldots.\ , n$

Es obvio que un plano de dos o tres dimensiones no tiene mayor problema para su gráfica, en la medida que aumenta la dimensión esta se hace cada vez mas dificil por no decir imposible de dibujar



En la Figura podemos apreciar la representación gráfica en ejes cartesianos de un punto

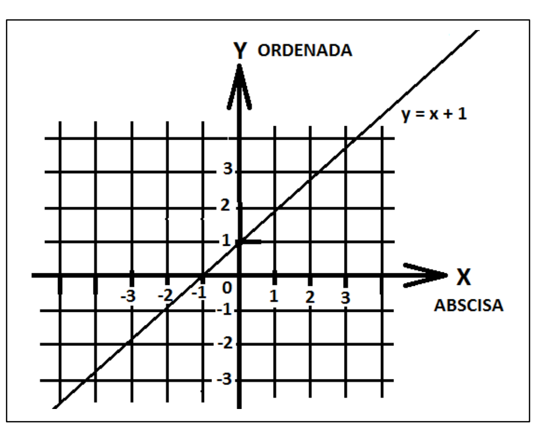


En la figura podemos apreciar la representación gráfica en ejes cartesianos (una parte) de los siguientes conjuntos:
C = $\{(\mathrm{m}, \mathrm{n}) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \,/\, \mathrm{m} = n^2\}$

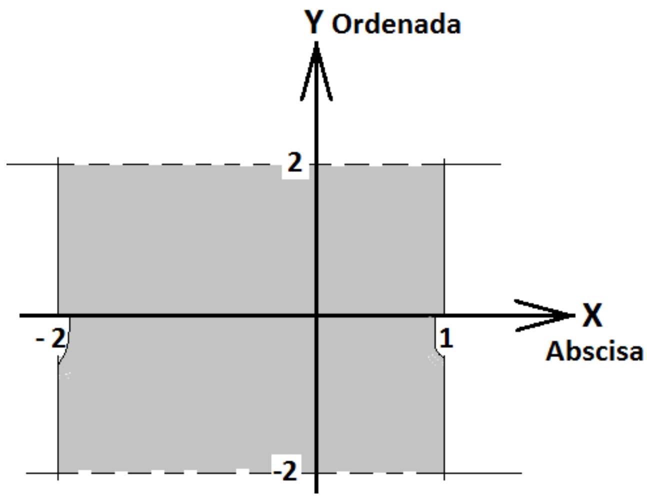
Notemos que C es un conjunto infinito de puntos separados, pues sus coordenadas son números enteros.

En la figura podemos apreciar la representación gráfica en ejes cartesianos del conjunto
L = {(x,y)|(x,y) ∈ $\mathbb{R}\ x\ \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ e y = x +1}

L es una recta continua de puntos

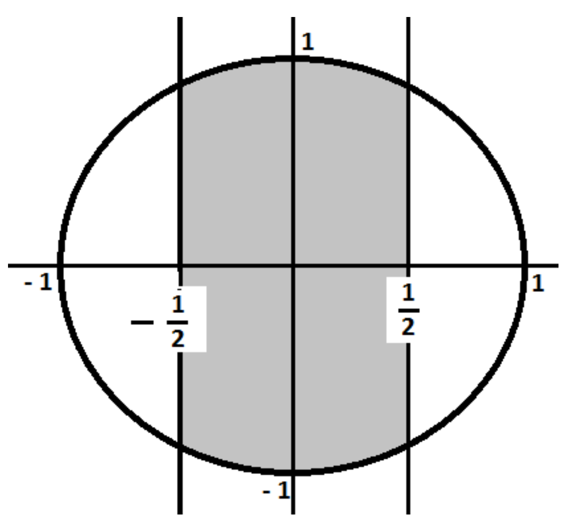


También podemos graficar regiones del plano, como muestra la siguiente figura, siendo
R = $\{(x, y) \in \mathbb{R}\, x\, \mathbb{R} \, / \, x \in [-2\,,1]\; e \;\; y \in (-2\,,\; 2\,)\}$



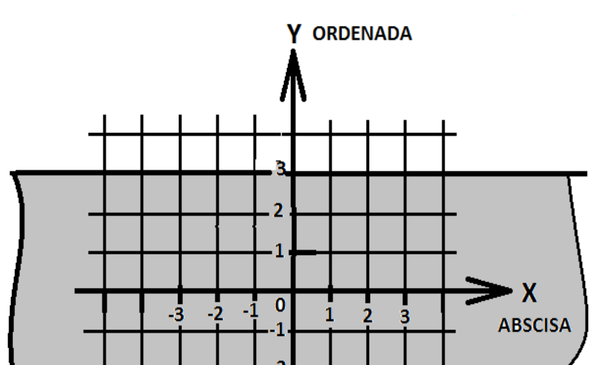
En la figura podemos apreciar que la ordenada esta dibujada con línea continua en cambio la abscisa esta con línea segmentada, esto se debe a que la abscisa es un intervalo cerrado en ambos límites (es decir incluye ambos límites) en cambio la ordenada es un intervalo abierto en ambos límites (no incluye los límites).

Así también podemos graficar otro tipo de regiones del plano, como muestra la siguiente figura, siendo
A = $\{(x\,,y\,) \;/\; x^2 + y^2 \le 1 \wedge x\,,y \in \mathbb{R}\;\}$ ∧ B = $\left\{(x\,,y) \;/\; x \in \left[-\frac{1}{2}\,,\frac{1}{2}\right]\right\}$



La representación gráfica de un conjunto, puede ser también en regiones no acotadas

Ejemplo; En la figura la banda infinita $A = \{(x\,,y) \;/\; x\,,\; y \in \mathbb{R} \;\wedge\; -2 \le y \le 3\}$



Obs.: Siempre que representemos puntos o conjuntos de puntos en un diagrama cartesiano, debemos elegir una escala apropiada en cada uno de los ejes. La escala elegida dependerá del conjunto a representar También puede ocurrir que los datos que se quieren representar tienen una o ambas coordenadas muy alejadas del 0. En este caso se suele convenir que el punto de intersección de ambos ejes coordenados no sea el (0,0) sino otro punto. Este punto nuevamente dependerá del problema en cuestión. Será conveniente desplazar el origen en el eje de las X

RELACIONES

Si un producto cartesiano tiene cardinalidad n (# n) entonces tiene 2^{n} subconjuntos, pues bien cualquiera de ellos forma una Relación.
De lo anterior podemos afirmar que:
Def.: Dados un par de conjuntos no vacíos A y B , llamaremos relación binaria entre A y B a un conjunto $\mathcal{R} \subseteq AxB$, y

lo denotaremos por $a\mathcal{R}b$ o $b = \mathcal{R}(a)$ cuando $(a\,,b) \in \mathcal{R}$ y $a \not{\mathcal{R}}\, b$ o $b \neq \mathcal{R}(a)$ cuando $(a\,,b) \notin \mathcal{R}$

Obs.: $(a\,,b) \in \mathcal{R} \subseteq$ A x B $\Leftrightarrow$ a $\in$ A $\wedge$ b $\in$ B

Si A = B se dice que $\mathcal{R}$ es una relación en A y que también se denota por A^{2}

Obs.: A x B y ϕ son relaciones de A en B

Ejemplos:

1. Considere los conjuntos A = $\{a\,,b\,,c\}$ y B = $\{1\,,2\}$, entonces cualquier relación de A en B tendrá a lo sumo seis elementos, por ejemplo $\mathcal{R}_1 = \{(a\,,1),(a\,,2),(b\,,2)\}$ es una relación de A en B, sin embargo la relación la relación $\mathcal{R}_2 = \{(a\,,1),(a\,,2),(b\,,2),(c\,,1)\}$no es una relación binaria de A en B, puesto que (c , 1) no pertenece a A x B
2. Tomemos el conjunto $\mathcal{R} = \{(m\,,n) \in \mathbb{Z}\,x\,\mathbb{N}\!: |m-n| \leq 5\}$ o escrito de otra manera pero que significa lo mismo $\mathcal{R}$ es una relación de $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{N}$ dada por $(m\,\mathcal{R}\,n \Leftrightarrow |m-n| \leq 5)$
3. $\leq$ es una relación de $\mathbb{R}\ en\ \mathbb{R}$ definida como el conjunto $\{(x\,,y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq y\}$

Se define el dominio de una relación al conjunto formado por todas las primeras componentes de los pares que forman la relación y se denota por Dom $\mathcal{R}$, simbólicamente:
Sea $\mathcal{R} \subseteq$ A x B $\Longrightarrow$Dom $\mathcal{R} = \{x \in A\ /\ \exists y \in B : x\,\mathcal{R}\,y\}$
Se define el recorrido de una relación al conjunto formado por todas las segundas componentes de los pares que forman la relación y se denota por Rec $\mathcal{R}$, simbólicamente:
Sea $\mathcal{R} \subseteq$ A x B $\Longrightarrow$ Rec $\mathcal{R} = \{y \in B\ /\ \exists a \in A : x\,\mathcal{R}\,y\}$

<u>Relación inversa</u>: Sea $\mathcal{R}$ una relación de A en B ($\mathcal{R} \subseteq$ A x B se define la relación inversa a la relación de B en A y se denota por $\mathcal{R}^{-1}$, es decir, sea $\mathcal{R} \subseteq$ A x B $\Longrightarrow$ $\mathcal{R}^{-1} \subseteq$ B x A

<u>Relación compuesta</u>: $\mathcal{R} \subseteq$ A x B $\wedge$ $\wp \subseteq$ B x C, se define la relación compuesta de $\mathcal{R} \wedge \wp$ a una relación de A en C y que se denota por $\wp \circ \mathcal{R}$, simbólicamente: $\wp \circ R = \{(x\,,z) \in A\,x\,C\ /\ \exists\, y \in B : x\,\mathcal{R}\,y\ \wedge y\,\wp\,z\}$.

Obs.: $\wp \circ R \equiv \wp\,(\,\mathcal{R}\,(x))$

Ejemplo: Sean: $\mathcal{R}$ la relación definida por $\mathcal{R}$ (x) = 5 x – 3 y $\wp$ definida por $\wp$ (x) = $\sqrt{x}+1$

i) $\wp \circ R$ (x) = $\wp\left(\mathcal{R}(x)\right) = \wp\,(5\,x-3) = \sqrt{5\,x-3}+1$, para $x \geq \frac{3}{5}$

ii) $\mathcal{R} \circ \wp$ (x) = $\mathcal{R}\left(\wp(x)\right) = \mathcal{R}\left(\sqrt{x}+1\right) = 5\left(\sqrt{x}+1\right)-3 = 5\sqrt{x}+2$, para $x \geq 0$

RELACION DE EQUIVALENCIA

Se dice que una relación $\mathcal{R} \subseteq A^2$ es una relación de equivalencia si cumple con los siguientes axiomas:

A_1: Ser REFLEJA, es decir, $\forall\ a \in A, a\mathcal{R}a$, dicho en palabras, cualquier $a \in A$ está relacionado consigo mismo
A_2: Ser SIMETRICA, es decir, $\forall\ a, b \in A\ si\ a\mathcal{R}b \implies b\mathcal{R}a$, en palabras, si a está relacionado con b, entonces b está relacionado con a
A_3: Ser TRANSITIVA, es decir, $\forall\ a, b, c \in A\ si\ a\mathcal{R}b\ \wedge b\mathcal{R}c \implies a\mathcal{R}c$, en palabras, si a está relacionado con b y b está relacionado con c, entonces a está relacionado con c

Ejemplo 1: Consideremos la relación "ser subconjunto" ($\subseteq$), esta relación cumple con el Axioma 1 , es decir, es refleja ya que para todo conjunto se cumple que es subconjunto de sí mismo, $\forall\ A$ Conjunto, $A \subseteq A$, tambien es transitiva ya que si $A \subseteq B\ \wedge B \subseteq C \implies A \subseteq C$, pero no es simétrica ya que si $A \neq B\ \wedge A \subseteq B \implies B \nsubseteq A$, salvo que A = B, pero eso contradice la hipótesis

Ejemplo 2: En geometría Euclidiana, la semejanza de triángulos cumple los tres axiomas, ya que todo triángulo es semejante a sí mismo, es decir, $\forall\ \Delta ABC$, se cumple que $\Delta ABC\ \mathcal{R}\ \Delta ABC$, es decir cumple con ser Refleja, es Simétrica, ya que si $\Delta ABC\ \mathcal{R}\ \Delta DEF \implies \Delta DEF\ \mathcal{R}\ \Delta ABC$ y también es transitiva, ya que si $\Delta ABC\ \mathcal{R}\ \Delta DEF\ \wedge\ \Delta DEF\ \mathcal{R}\ \Delta GHI \implies \Delta ABC\ \mathcal{R}\ \Delta GHI$, por lo tanto podemos afirmar que la semejanza de triángulos es una relación de EQUIVALENCIA.

Si $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia en A, entonces la clase de equivalencia de cualquier elemento $a \in A$, denotada por $[a]$, es el conjunto de todos los elementos con los cuales a esta relacionado, simbólicamente

$$[a] = \{x : x\ \mathcal{R}\ a\}$$

La colección de las clases de equivalencia, denotada por $A\,/\mathcal{R} = \{[a]: a \in A\}$, se llama el cociente de A por $\mathcal{R}$, es decir la relación $\mathcal{R}$ produce una partición de A, que significa que todo $a \in A$ pertenece a un miembro de $A\,/\mathcal{R}$ y los miembros de $A\,/\mathcal{R}$ son disjuntos dos a dos.

Ejemplo: Si amplificamos una fracción sucesivamente por los números naturales obtenemos un conjunto de fracciones equivalentes y a la fracción irreductible le llamamos representante de la clase de equivalencia, el conjunto formado por todas las clases de equivalencia es el que llamamos conjunto de los números racionales.
Algunos ejemplos para ilustrar lo anterior:

$\left[\frac{2}{3}\right] = \left\{\frac{2}{3}, \frac{4}{6}, \frac{6}{9}, \ldots\ldots\ldots\ldots..\right\}$ $\left[\frac{3}{2}\right] = \left\{\frac{3}{2}, \frac{6}{4}, \frac{9}{6}, \ldots\ldots\right\} \implies \left[\frac{2}{3}\right] \cap \left[\frac{3}{2}\right] = \phi$, es decir, son disjuntos

RELACION DE ORDEN

Se dice que una relación $\mathcal{R} \subseteq A^2$ es una relación de Orden o simplemente es un orden en A si cumple con los siguientes axiomas:

A_1: Ser REFLEJA, es decir, $\forall\ a \in A, a\mathcal{R}a$, dicho en palabras, cualquier $a \in A$ está relacionado consigo mismo
A_2: Ser ANTISIMETRICA, es decir, $\forall\ a, b \in A\ si\ a\mathcal{R}b\ \wedge b\mathcal{R}a \implies a = b$, en palabras, si a está relacionado con b y b está relacionado con a entonces a debe ser igual a b
A_3: Ser TRANSITIVA, es decir, $\forall\ a, b, c \in A\ si\ a\mathcal{R}b\ \wedge b\mathcal{R}c \implies a\mathcal{R}c$, en palabras, si a está relacionado con b y b está relacionado con c, entonces a está relacionado con c

Obs.:

- Si $\mathcal{R}$ es un orden en A, diremos que "a" precede a "b" cada vez que $a\mathcal{R}b$
- Diremos que dos elementos de A (a , b ∈ A) son comparables ⟺ $(a\mathcal{R}b\ \vee b\mathcal{R}a)$
- Si $\mathcal{R}$ es un orden que hace que todo par de elementos sea comparables, entonces diremos que $\mathcal{R}$ es una relación de Orden Total, en caso contrario, diremos que es de Orden Parcial.

Ejemplo 1: la relación "ser menor o igual" ($\leq$) es una relación de Orden Total en $\mathbb{R}$
Ejemplo 2: La relación "ser divisible" en $\mathbb{N}$, No es una relación de Orden Total, es de Orden parcial.
(HINT: a/b⟺ b = k a)
Demostración:

- Es Refleja, ya que todo número es divisible por sí mismo n = 1 · n

- Es Antisimétrica, ya que si a/b ∧ b/a, entonces existen k y j ∈ ℕ tal que b = k a ∧ a = j b ⟹ b = k j b ⟹ b – k j b = 0⟹ b (1 – k j) = 0 (1)
  procediendo del mismo modo obtenemos que a (1 – k j) = 0 (2)
  (dos cantidades iguales a una tercera son iguales entre si), por (1) y (2) tenemos que
  a (1 – k j) = b (1 – k j) (3)
  Si (1 – k j) = 0 ⟹ k j = 1 ⟹ k = $\frac{1}{j}$ lo cual no puede ser ya que k ∈ ℕ, salvo que j = 1 y si j = 1 ⟹ k = 1, de donde se obtiene en (1) y (2) que a · 1 = b · 1 ⟹ a = b
  Si (1 – k j) ≠ 0 en (3) se puede simplificar por (1 – k j), obteniéndose de igual manera que a = b
  Por lo tanto la relación es antisimétrica
- Es Transitiva, ya que si a/b ∧ b/c entonces existen k ∧ j ∈ ℕ, tal que b = k a ∧ c = j b ⟹ c = j k a, es decir a/c
  Por lo tanto es Transitiva.
  Por lo tanto es de Orden, pero no es de orden Total puesto que el 3 y el 5 no son comparables, el 3 no divide al 5 y el 5 no divide al 3, por lo tanto es de Orden Parcial

Ejercicios:

1.-) Dados A = $\{a\,,b\,,c\}$ ∧ B = $\{a\,,b\,,d\}$ determine
1.1.-) A x B
1.2.-) B x A
1.3.-) $\{(x\,,y)\;/\;(x\,,y)\;\in A\;x\;B\;\wedge x=y\}$

2.-) Sea C = $\{0\,,1\,,2\,,3\,,4\}$ ∧ D = $\{0\,,2\;\,,4\}$
2.1.-) ¿Cuántos pares ordenados tiene C x D y D x C?
2.2.-) Determine $\{(a\,,b)\;/\;(a\,,b)\;\in C\;x\;D\;\wedge a<b\}$
2.3.-) ¿Cuál es la cardinalidad del conjunto del problema anterior
2.4.-) Determine $\{(a\,,b)\;/\;(a\,,b)\;\in C\;x\;D\;\wedge a>b\}$
2.5.-) Determine $\{(a\,,b)\,/\;(a\,,b)\;\in C\;x\;D\;\wedge a+b=3\}$
2.6.-) Determine $\{(a\,,b)\,/\;(a\,,b)\;\in C\;x\;D\;\wedge a\cdot b=4\}$
2.7.-) Determine $\{(a\,,b)\;/(a\,,b)\;\in C\;x\;D\;\wedge a+b=10\}$
2.8.-) Para cada uno de los ejercicios tratados en el punto 2, representarlos en un diagrama de ejes cartesianos

3.-) Graficar en un eje de coordenadas los siguientes productos cartesianos
3.1.-) $\{(x\,,y)\quad(x\,,y)\;\in\;\mathbb{R}^2\;\wedge 0\;\leq x\;\leq 2\;\;\wedge\;-2<y<3\}$
3.2.-) El conjunto formado por los ángulos interiores de un triángulo cuyos vértices son:
$(-1\,,-1),(-1\,,3),(2\,,0)$
3.3.-) $\{(a\,,b)\;/\;(a\,,b)\;\in\mathbb{R}^2\;\wedge a=b\}$

3.4.-) $\{(a\,,b)\;/\;(a\,,b)\;\in\mathbb{R}^2\;\wedge a>2\}$
3.5.-) $\{(a\,,b)\;/\;(a\,,b)\;\in\mathbb{R}^2\;\wedge\;b<3\}$
3.6.-) $\{(a\,,b)\;/\;(a\,,b)\;\in\mathbb{R}^2\;\wedge 2\,a-b=4\}$
3.7.-) $\{(a\,,b)\;/\;(a\,,b)\;\in\mathbb{R}^2\;\wedge a+3\,b=9\}$
3.8.-) $\{(a\,,b)\;/\;(a\,,b)\;\in\mathbb{R}^2\;\wedge b=2\,a\}$

4.-) Represente en un eje de coordenadas los siguientes productos cartesianos
4.1.-) $\{2\,,5\,,9\,\}\;x\;\mathbb{N}$
4.2.-) $\mathbb{Z}\;x\;\{1\,,0\,,-1\}$
4.3.-) $\{a\}\;x\;\mathbb{R}\,,con\;a\;\;\in\mathbb{R}$
4.4.-) $[1\,,3]x[3{,}4]$
4.5.-) $]-1\,,1]x[1\,,5]$
4.6.-) $([-2\,,4]-\;]0\,,1])x[1\,,3]$

5.-) Para conjuntos arbitrarios A , B , C , D, demuestre que:
5.1.-) $(A\;\subseteq C\;\wedge B\;\subseteq D)\;\Longrightarrow A\;x\;B\;\subseteq C\;x\;D$
5.2.-) $(A\;\cup B)\;x\;C=\;(A\;x\;C)\;\cup(B\;x\;C)$
5.3.-) $(A\;\cap B)\;x\;C=\;(A\;x\;C)\;\cap(B\;x\;C)$

6.-) Demuestre a través de un contraejemplo que $A \cup (B \: x \: C) \neq (A \cup B) \: x \: (A \cup C)$

7.-) Determine el dominio y el recorrido de las siguientes relaciones
7.1.-) $\mathcal{H} = \{(1,1),(2,-1),(3,1),(4,-1),(5,1),(6,-1),\ldots\ldots\ldots.\}$
7.2.-) $\mathfrak{I} = \left\{\left(\frac{1}{2},5\right),\left(-\frac{1}{4},5\right),\left(\frac{1}{8},5\right),\ldots\ldots\ldots\right\}$
7.3.-) $\mathcal{L} = \left\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \: / \: b = \sqrt{a-3}\right\}$

8.-) Sea $\wp = \{(1,5),(4,5),(1,4),(4,6),(3,7),(7,6)\} \subset \mathbb{N}x\mathbb{N}$, grafique la relación $\wp$ y determine su dominio, recorrido, la inversa, el dominio de la inversa y el recorrido de la inversa.

9.-) Sea $\mathcal{R}$ la relación en $\mathbb{N}$, definida por $(x,y) \in \mathcal{R} \Leftrightarrow x + 2\,y = 14$, determine
9.1.-) $\mathcal{R}(2), \mathcal{R}\,(5) \wedge \mathcal{R}(8)$ si existen
9.2.-) dominio y recorrido de $\mathcal{R}$

10.-) Para cada uno de los conjuntos $\wp$ que se definen mas adelante, determine conjuntos A y B adecuados, no necesariamente distintos, para los cuales $\wp$ defina una relación de A en B
10.1.-) $(a,b) \in \mathcal{R} \Leftrightarrow$ a es hijo de b
10.2.-) $(x,y) \in \mathcal{R} \Leftrightarrow$ x es paralela a y
10.3.-) $(u,v) \in \mathcal{R} \Leftrightarrow v$ es múltiplo de u
10.4.-) $(p,q) \in \mathcal{R} \Leftrightarrow p + q = 1$

11.-) Dados A = $\{x \: / \: x \in \mathbb{N} \wedge x \leq 8\}$ y B= $\{x \: / \: x \in \mathbb{N} \wedge 3 < x \leq 12\}$
11.1.-) Determinar cuáles de las siguientes relaciones constituyen una relación de A en B
- $\mathcal{R}_1 = \{(1,4),(4,2),(1,8),(8,10)\}$
- $\mathcal{R}_2 = \{(0,1),(1,1),(1,2),(3,4),(3,8)\}$
- $\mathcal{R}_3(x) = y \Leftrightarrow x \in A \wedge x - y = 0$
- $x\mathcal{R}_4 y \Leftrightarrow x \in A \wedge x + 3 = y$

11.2.-) Determinar cuáles de las siguientes relaciones constituyen una relación de B en A
- $\wp_1 = \{(5,2),(6,3),(6,4),(7,1)\}$
- $\wp_2 = \{(5,3),(7,5),(9,7),(10,8)\}$
- $\wp_3(x) = y \Leftrightarrow x \in B \wedge x - y = 10$

12.-) Dados A = $\{x \: / \: x \in \mathbb{Z} \wedge -3 \leq x < 1\}$, B = $\{y \: / \: y \in \mathbb{N} \wedge y \leq 5\}$, defina por extensión las siguientes relaciones de A en B
12.1.-) $\mathcal{R} = \{(x,y) \: / \: x \: divide \: a \: y\}$
12.2.-) $(x,y) \in \wp \Leftrightarrow x + 3 = y$
12.3.-) $\mathcal{H}(x) = y \Leftrightarrow x - y + 1 = 0$
12.4.-) $x\mathcal{L}y \Leftrightarrow y = |x + 2|$

13.-) grafique según un sistema de ejes de coordenadas las siguientes relaciones
13.1.-) $\mathcal{R} = \{(x,y) \: / \: (x,\ y) \in \mathbb{N}^2 \wedge x = y\}$
13.2.-) $\mathcal{R} = \{(x,y) / (x,\ y) \in \mathbb{Z}^2 \wedge x - 2\,y = 0\}$
13.3.-) $\mathcal{R} = \{(x,y) / (x,\ y) \in \mathbb{Q}^2 \wedge x + y = 1\}$
13.4.-) $\mathcal{R} = \{(x,y) / (x,\ y) \in \mathbb{R}^2 \wedge x^2 + y^2 = 9\}$
13.5.-) $\mathcal{R} = \{(x,y) \: / \: (x,\ y) \in \mathbb{R}^2 \wedge x^2 + y^2 > 9\}$
13.6.-) $\mathcal{R} = \{(x,y) \: / \: (x,\ y) \in \mathbb{R}^2 \wedge x + y \geq 2\}$
13.7.-) $\mathcal{R} = \left\{(x,y) \: / \: (x,\ y) \in \mathbb{R}^2 \wedge y = \pm\sqrt{x}\right\}$

14.-) Dados A = $\{x \: / \: x \in \mathbb{N} \wedge 1 \leq x \leq 5\}$, B = $\{x \: / \: x \in \mathbb{R} \wedge x^3 - 9\,x^2 + 26\,x - 24 = 0\}$ y considere la relación $\mathcal{R} \subseteq$ A x B definida por $\mathcal{R} = \{(x,y) \in A \: x \: B \: / \: x + y \leq 6\}$, determine $\mathcal{R}$ por extensión y defina $\mathcal{R}^{-1}$ por comprensión y por extensión

15.-) Considere las relaciones $\mathcal{R} = \{(1,2),(2,3),(3,4),(1,3),(5,6),(7,2),(8,0),(9,1)\}$ y
$\wp = \{(4,7),(5,2),(3,1),(0,8),(1,9),(3,2),(2,3),(1,1)\}$, determine:
15.1.-) $\wp^{-1} \cap \mathcal{R}^{-1}$
15.2.-) $\wp \circ \mathcal{R}$

15.3.-) $\wp \circ \mathcal{R}^{-1}$
15.4.-) $\wp^{-1} \circ \mathcal{R}^{-1}$

16.-) Considere las relaciones en $\mathbb{R}$: $\mathcal{R} = \{(x\,,y)\ /\ y = 2x\}$ y $\wp = \{(x\,,y)\ /\ y = x^2\}$
16.1.-) Grafique ambas relaciones
16.2.-) Determine en cada una de ellas sus respectivos dominios
16.3.-) Determine $\mathcal{R} \circ \wp$
16.4.-) Determine $\wp \circ \mathcal{R}$
16.5.-) Determine $\mathcal{R}^{-1}$ y $\wp^{-1}$

17.-) Sea A = $\{-1\,,0\,,1\,,2\}$ y considere las relaciones en A, ¿que axiomas cumplen cada una de ellas?:
17.1.-) $\mathfrak{R} = \{(-1\,,1),(0\,,0),(1\,,-1),(1\,,2),(2\,,1),(2\,,2)\}$
17.2.-) $\wp = \{(0\,,0),(0\,,1),(1\,,0),(1\,,1)\}$
17.3.-) $\mathcal{L} = \{(a\,,b) \in A\ x\ A\ /\ a^2 + b^2 = 1\}$
17.4.-) $\mathcal{g} = \{(x\,,y) \in A\ x\ A\ /\ x\,y \geq 0\}$

18.-) Construya una relación $\mathcal{R}$ en $\mathbb{N}$ que contenga nueve elementos, que se transitiva y que incluya los siguientes pares ordenados $(3\,,5),(5\,,9),(5\,,7)\ y\ (7\,,5)$

19.-) Sea A = $\{2\,,5\,,7\,,8\}$, determine una relación $\wp$ en A que cumpla con:
19.1.-) Dom $\wp = \{2\,,5\,,8\} =$ Rec $\wp$
19.2.-) $\wp$ sea simétrica
19.3.-) # $\wp$ =3
19.4.-) (5 , 2) $\in \wp$ y que sea refleja, simétrica pero no transitiva
19.5.-) No ser ni simétrica ni antisimétrica
19.6.-) Que sea simétrica y antisimétrica

20.-) Demuestre que en $\mathbb{Z}$ la relación definida por $(a\,,b) \in \mathcal{L} \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}: b - a = 3\,k$ es una relación de equivalencia

21.-) Demuestre que en $\mathbb{Z}$ la relación definida por $(a\,,b) \in \mathcal{L} \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}_0: b - a = k$ es una relación de orden

22.-) Demuestre que si $\wp$ es una relación de orden en un conjunto A, entonces $\wp^{-1}$ también lo es

23.-) En el conjunto A = $\{a\,,b\,,c\,,d\,,e\}$, se define la relación $\alpha = \{(a\,,b),(b\,,c),(a\,,e),(c\,,b),(a\,,d),(c\,,e),(b\,,a),(a\,,c)\}$, agregue a esta relación el mínimo de elementos de tal modo que cumpla con ser transitiva

24.-) En el conjunto A = $\{a\,,b\,,c\,,d\,,e\}$, se define la relación $\beta = \{(a\,,b),(b\,,c),(a\,,e),(c\,,b),(a\,,d),(c\,,e),(b\,,a),(a\,,c)\}$, elimine los elementos mínimos necesarios de tal modo que la relación cumpla con ser antisimétrica

FUNCIONES:

Diremos que una función es una relación, es decir, es un subconjunto de un producto cartesiano que cumple con dos condiciones necesarias y suficientes y que son que todo elemento del conjunto de inicio esté relacionado con algún elemento del conjunto de llegada y además que esta relación sea única.
Dicho en otras palabras: Sean A y B conjuntos no vacíos, una función de A en B es una relación Δ de A en B tal que

$$\forall\ x \in A, \exists!\ y \in B: x\Delta y$$

o también se puede definir como:
Se dice que f es una función de A en B si y solo si:

- Dom f =A, es decir, ∀ x ∈ A, ∃ y ∈ B / f (x) = y
- Si x = a ⟹ f(x) = f(a)

Si f es una función de A en B se acostumbra anotarlo como:

$$f: A \longrightarrow B$$

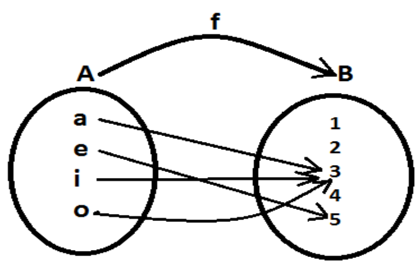
$x \mapsto f(x) = y$

Al conjunto A se le llama conjunto de partida o DOMINIO de la función y se denota por $Dom\ f$
Al conjunto B se le llama conjunto de llegada o CODOMINIO de la función y se denota por $Codom\ f$

Ejemplo 1: Sea $f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ tal que $f(n) = 2\,n, n \in \mathbb{N}$ es una función ya que número natural que tomemos al aplicarle la función obtenemos un único doble de él y además todos los números naturales tienen un doble de él.
Ejemplo 2: Sea $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^2$es una función puesto que a cada número real le corresponde un único cuadrado y todo número real puede ser elevado al cuadrado, es decir, ser multiplicado por sí mismo.
Ejemplo 3: Sea $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \pm\sqrt{x}$ NO es una función puesto que los números negativos no tienen solución en $\mathbb{R}$, $f(-25)\nexists\ en\ \mathbb{R}$, es decir, los números negativos no tienen imagen.
Ejemplo 4: Sea $f: \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \pm\sqrt{x}$ NO es una función puesto que por ejemplo el número 4 tendría dos imágenes +2 y -2
Ejemplo 5: Sea $f: \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sqrt{x}$ Si es una función ya que sólo se considera la raíz positiva, es decir, el $Dom\ f = \mathbb{R}_0^+$ y el $Rec\ f = \mathbb{R}_0^+$

El concepto de función es demasiado amplio, ya que aplicable en un sin número de situaciones, como por ejemplo, el precio de venta de los artículos de una multitienda, cada objeto tiene un único precio a pagar y todos los artículos en venta tienen un precio (se supone) o las edades de los niños en un jardín infantil, cada niño tiene una única edad y todo tienen edad, el determinante de una matriz real de orden dos, el asiento que ocupa un niño en la sala de clases, el RUT que le corresponde a cada persona radicada en Chile, etc.

Una función se puede representar también en un diagrama de flechas llamado también diagrama sagital, por ejemplo, Dados los conjuntos A = $\{a\,, e\,, i\,, o\}$ y el conjunto B = $\{1\,, 2\,, 3\,, 4\,, 5\}$, definida por $f(a) = 3\,, f(e) = 5\,, f(i) = 3\,, f(o) = 3$ en un diagrama sagital queda determinada por



Aquí podemos observar que NO es necesario que todos los elementos del conjunto B pertenezcan al recorrido, lo que sí es necesario que todo elemento del dominio esté relacionado con algún elemento del conjunto B y además que desde cada elemento del dominio parta solo una flecha hacia algún elemento del conjunto de llegada.

Definiciones básicas:

1.-) Si f es una función de A en B, entonces la representación gráfica de f es un subconjunto de A x B, se llama gráfico de f al conjunto Graf $(f) = \{(x\,, f(x)) : x \in A\}$

2.-) Sea $f: A \longrightarrow B$ una función, llamaremos al conjunto A dominio de la función o también conjunto de partida de la función y lo denotaremos por $Dom\ f$ (Se suele decir también conjunto preimagen)y al conjunto B lo llamaremos conjunto de llegada de la función y al subconjunto de B que es aquel que está formado por todos los elementos que están relacionados con alguno del conjunto A lo llamaremos recorrido de la función (se suele llamar conjunto imagen) y lo denotaremos por $Rec\ f$, en la grafica anterior el dominio de la función queda determinado por $Dom\ f = \{a\,, e\,, i\,, o\}$ y el recorrido por $Rec\ f = \{3\,, 5\}$

3.-) Sean $f \wedge g$ dos funciones de A en B, diremos que $f = g \Leftrightarrow f(a) = g(a), \forall a \in A$

4.-) Sean $f: A \longrightarrow B \ \wedge\ g: C \longrightarrow D$ dos funciones, entonces $f = g \Leftrightarrow \begin{cases} Dom\,(f) = Dom\,(g) \\ Rec(f) = Rec\,(g) \\ \forall a \in Dom(f): f(a) = g(a) \end{cases}$

5.-) Sea f una función de A en B, diremos que f es:

- Inyectiva o uno a uno si $\forall\ a\,, b \in A[\ f(a) = f(b) \Longrightarrow a = b] \equiv \forall\ a\,, b \in A, [\ a \neq b \Longrightarrow f(a) \neq f(b)]$
- Sobreyectiva o Epiyectiva, Sea $f: A \longrightarrow B$ una función, entonces f es epiyectiva si y solo si $(\forall y \in B)(\exists x \in A): f(x) = y$
- Biyectiva: Sea $f: A \longrightarrow B$ una función, entonces f es biyectiva ssi es inyectiva y epiyectiva

6.-) Sea f una función de A en A, tal que $(\forall x \in A), f(x) = x$,a esta función se le llama función identidad en A y se denota por $Id_A: A \longrightarrow A: Id_A(x) = x\ (\forall x \in A)$

7.-) Función Inversa: Sea f una función de A en B, biyectiva, tal que $f(x) = y \Longrightarrow \exists g$ función de A en B tal que $g(y) = x$, a esta función se le llama inversa de f y se denota por f^{-1} , es decir,

$(\forall x \in A)(\forall y \in B): f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$

Dem.: f $es\ biyectiva \Leftrightarrow (\forall y \in B)(\exists!\, x \in A): f(x) = y \Leftrightarrow (\forall y \in B)(\exists!\, x \in A): x\mathcal{R}y \Leftrightarrow (\forall y \in B)(\exists!\, x \in A): y\mathcal{R}x$
$\Leftrightarrow g\ es\ función$

8.-) Si f una función de A en B, biyectiva se tiene que $f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$, además
$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}[f(x)] = f^{-1}(y) = x$, que es la identidad en A,
por otro lado $(f \circ f^{-1})(y) = f[f^{-1}(y)] = f(x) = y$,que es la identidad en B
y por último $\left(f^{-1}\right)^{-1} = f$

Ejercicios resueltos:

1.-) Dada la función $h: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $h(x) = a$, donde a es el mayor entero que cumple con que a≤x, encontrar $h(11/3), h(7), h(-\frac{3}{5})$
Respuesta: $h(11/3) = h(3,\overline{6}) = 3$, $, h(7) = 7$, $h\left(-\frac{3}{5}\right) = 0$

2.-) ¿Cuáles son las dos razones que impiden que la relación $g = \{(x, y) \in \mathbb{R}x\mathbb{R}: x^2 + y^2 = 9\}$ sea una función

Respuesta: 1) El valor de $g(x)$ no está definido para todos los números reales, por ejemplo, si x = 4$\Longrightarrow 4^2 + y^2 = 9$
$\Longrightarrow 16 + y^2 = 9 \Longrightarrow y^2 = 9 - 16 \Longrightarrow y^2 = -7$ $\longrightarrow\!\!\!\times\!\!\!\longleftarrow$, ya que $\nexists y \in \mathbb{R}$, que al elevarlo al cuadrado se obtenga un real negativo.
2) Si x = 1 $\Longrightarrow 1^2 + y^2 = 9 \Longrightarrow 1 + y^2 = 9 \Longrightarrow y^2 = 9 - 1 \Longrightarrow y^2 = 8 \Longrightarrow y = \pm 2\sqrt{2}$, es decir tiene dos imágenes

3.-) Dadas las funciones $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = (x + 2)$ y $g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = \frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)}$, pruebe si son o no iguales.

Respuesta: No son iguales puesto que el $Dom\ f = \mathbb{R}$ sin embargo el $Dom\ g = \mathbb{R} - \{1\}$ya que en este punto la función g no está definida, además le $Rec\ f = \mathbb{R} \wedge Rec\ g = \mathbb{R} - \{3\}$

4.-) Dada la función $k: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $k(x) = x^2$ ¿es una función biyectiva?

Respuesta: No porque no es inyectiva que si $x_1 = 3 \Longrightarrow k(x_1) = 3^2 \Longrightarrow k(x_1) = 9$ si
$x_2 = -3 \Longrightarrow k(x_2) = (-3)^2 \Longrightarrow k(x_2) = 9$ y para que k sea inyectiva debe ocurrir que
si $k(x_1) = k(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2$ como $k(x_1) = 9 \wedge k(x_2) = 9 \Longrightarrow 3 = -3$ lo cual es un contradicción puesto que $3 \neq -3$ n el conjunto de los números reales.
Tampoco es epiyectiva, puesto que y= – 25 ∈ ℝ y no existe ningún número real que elevado al cuadrado de como resultado – 25, por lo tanto hay al menos un número en el conjunto de llegada que no tiene preimágen

EJERCICIOS POR RESOLVER

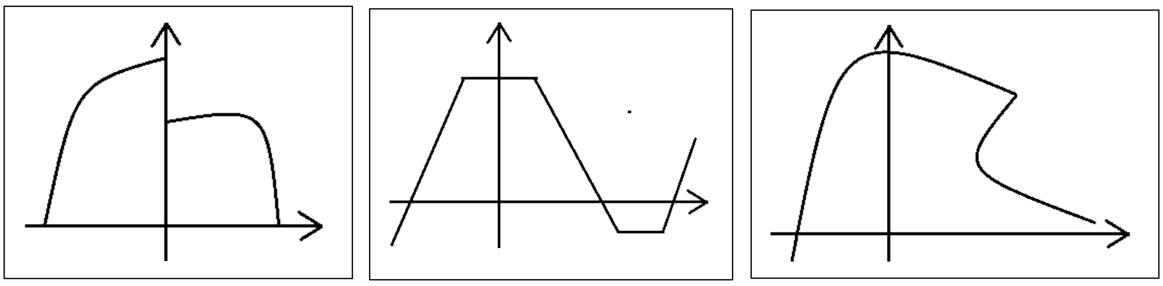
1.-) Determine si las siguientes relaciones definen
1.1.-) P = $\{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (1, 4), (6, 9)\}$ una función en $\mathbb{N}$
1.2.-) R = $\{(x, y) \in \mathbb{Z}x\mathbb{Z}: y = 2x + 1\}$ una función en $\mathbb{Z}$
1.3.-) S = $\{(2, x): x \in \mathbb{R}\}$ una función en $\mathbb{R}$
1.4.-) T = $\{(x, y) \in \mathbb{R}x\mathbb{R}: x = y^2\}$ una función en $\mathbb{R}$

2.-) Muestre a través de un contraejemplo que las siguientes relaciones no son funciones
2.1.-) V = $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$
2.2.-) W = $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x < 3 \wedge -1 \leq y \leq 5\}$

3.-) Sea A = $\{a\,, b\,, c\}$ y B = $\{1\,, 0\}$. Determine todas las funciones distintas que se forman de A en B

4.-) Dados A = $\{1\,, 2\,, 3\,, 4\,, 5\}$, B = $\{a\,, b\,, c\,, d\}$ y la relación
$\mathcal{L} \subseteq$A x B = $\{(1\,, a), (2\,, c), (1\,, c), (4\,, b), (5\,, a), (4\,, d)\}$
agregue o elimine elementos de tal modo de convertir esta relación en una función

5.-) Cuál (es) de los siguientes gráficos corresponden al de una función en $\mathbb{R}$



6.-) Sea f una función en $\mathbb{R}^2$ definida por $f(x) = x^3 - x + 1$ ¿Cuáles de los siguientes pares pertenecen a la función?
$$\{(0\,, 0), (1\,, 0), (0\,, 1), (1\,, 1), (1\,, -1), (2\,, 3), (2\,, -3), (-2\,, -5), (-1\,, 1)\}$$

7.-) Dada la función f en $\mathbb{R}^2$ definida por $f(x) = 3\,x^{\,2} - x^{\,3} + 5\,x - 1$, determinar $f(-1)\,, f(0)\,, f(\sqrt{3}\,)$

8.-) Dada la función f en $\mathbb{R}^2$ definida por $f(x) = a\,x^{\,2} + b\,x + c$ con $a\,, b\,, c\ \in \mathbb{R}$, determinar
$f(x+1)\,; f(x-2)\ y\ \ f\left(\frac{1}{x}\right)\ con\ x \neq 0$

9.-) Dada la función f en $\mathbb{R}^2$ definida por $f(x) = 4\,x^{\,2} - \ x + \frac{2}{x-1}$, determinar $f(0)\,, f(x+1)$

10.-) Considere los intervalos $A\,[-1\,, 1]$, $B = [1\,, 3]\ y\ \ C = \ [-3\,, -1]$ y las funciones $f\,, g\,, h$ definidas en A , B , C respectivamente, por la fórmula $f(x) = g(x) = h(x) = \ x^{\,2}$. ¿Cuál de estas funciones es inyectiva?.

11.-) Sea A un conjunto tal que $\#\ A \geq 2$ y sea $a \in A$, se define la función $f\colon A \longrightarrow A$ tal que $f(x) = a, \forall x \in A$
11.1.-) Determine el recorrido de f
11.2.-) Muestre que f no es ni inyectiva ni epiyectiva
11.3.-) Si $A = \mathbb{N}$ y $a = 2$, grafique f
11.4.-) Si $A = \mathbb{R}$ y $a = 2$, grafique f.

12.-) Sea $g\colon \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$, definida por $g(x) = 2\,x$
12.1.-) Determine $g \circ g$
12.2.-) Determine $g \circ g \circ g$
12.3.-) Determine $g \circ g \circ g \circ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots . \circ\, g \quad (n\ veces)$
12.4.-) Demuestre que g es inyectiva
12.5.-) ¿Es g una función biyectiva?, justifique su respuesta

13.-) Sea $h\colon \mathbb{R} - \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $h(x) = \frac{1}{x}$, demuestre que $h(a) - h(b) = h\left(\frac{a\,b}{b-a}\right)$

14.-) Determinar $k(x+1)$ si se sabe que $k(x-1) = x^{\,2}$

15.-) Una función g está definida en $[1\,, 5]$. ¿Para cuántos "x" existen $g(x-3)\,;\ \ g\left(\frac{1}{x}\right)\ \ \wedge\ \ g(1 - 7\,x)$?

16.-) Si la compañía Costa S. A. tiene en su bodega 500 unidades de Play, al comienzo de mes y se venden 20 unidades diarias:
16.1.-) Encontrar una función que represente el número de unidades en bodega un día cualquiera del mes.
16.2.-) En qué día del mes se agotará la cantidad de Play
16.3.-) ¿Cuántos Play tendrá transcurridos 15 días?

17.-) El costo de almacenaje de sacos de papas está dado por la función $f(x) = 0{,}04\,x + 1{,}36$ en donde x representa el costo unitario de cada saco de papas.
17.1.-) Construya la gráfica de f para $x \in [5\,, 20]$
17.2.-) ¿Cuál sería el costo de almacenaje para el cajón de tomates, si cada cajón cuesta $6?

17.3.-) ¿Cuál sería el valor de cada unidad de cajón de peras si el costo de almacenaje es de $1,80?.

Ejercicios extraídos de Guía de ejercicios de la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas de la Universidad de Chile, Introducción al Algebra 09-1 año 2009.

18.-) Indique cuál de los siguientes conjuntos establece una función:
18.1.-) $R = \{(a, b) \in \mathbb{N}^2 : b = a^p \; para \; algún \; p \in \mathbb{N}\}$
18.2.-) Sean a , b , c $\in \mathbb{R} - \{0\}$ fijos, $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \; / \; y = a\,x^3 + b\,x + c\}$
18.3.-) $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \; / \; x = y^2 + 2\,y + 1\}$
18.4.-) $R = \{(y, x) \in \mathbb{R}^2 \; / \; x = (y + 1)^2\}$

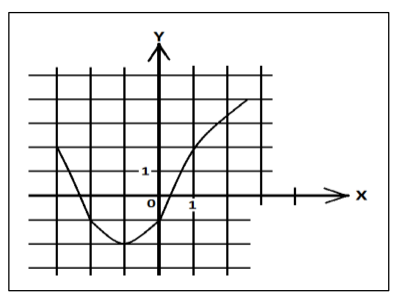
19.-) Indique cuáles pares de funciones son iguales, si no lo son, explique porqué
19.1.-) $f, g : \mathbb{R} - \{-2\} \longrightarrow \mathbb{R} \; con \; f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 2x + 2} \; \wedge \; g(x) = \frac{x-1}{x+2}$
19.2.-) $f, g : \mathbb{R} - \{-1, 0, 1\} \longrightarrow \mathbb{R} \; con \; f(x) = \frac{1}{x} \; \wedge \; g(x) = \frac{(x-1)(x+1)}{x^3 - x}$
19.3.-) $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \; con \; f(x) = (x + 2)^3 \; \wedge \; g(x) = x^3 + 6\,x^2 + 12\,x + 8$
19.4.-) $f, g : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R} \; con \; f(x) = \frac{x}{\sqrt{x}} \; \wedge \; g(x) = \sqrt{x}$

20.-) Dados los conjuntos A y B, determine si las siguientes relaciones son funciones y si son inyectivas, sobreyectivas y biyectivas. Encuentre la función inversa en el caso que corresponda
20.1.-) $\pi_A : A \; x \; B \longrightarrow A, dada \; por \; [\forall (a, b) \in A \; x \; B] \pi_A\big((a, b)\big) = a$
20.2.-) $\pi_B : A \; x \; B \longrightarrow B, dada \; por \; [\forall (a, b) \in A \; x \; B] \pi_B\big((a, b)\big) = b$

21.-) Encuentre la función inversa de las siguientes funciones, verificando previamente si son biyectivas.
21.1.-) $f : \mathbb{R} - \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}, con \; f(x) = \frac{1}{x^3}$
21.2.-) Sea $a \neq 0, f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, con \; f(x) = a\,x + b$
21.3.-) $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x}{\sqrt{x}}$

Ejercicios extraídos del libro: CÁLCULO DE UNA VARIABLE DE JAMES STEWART

22.-) La gráfica muestra una función, de acuerdo a ella
22.1.-) Determinar el valor de $f(-1)$
22.2.-) Estime el valor de $f(2)$
22.3.-) ¿Para qué valores de x, $f(x) = 2$
22.4.-) Estime los valores de x tales que $f(x) = 0$
22.5.-) establezca el dominio y el recorrido o rango de f



23.-) Si $f(x) = x^3$, evalúe el cociente de diferencias $\frac{f(2+h) - f(2)}{h}$ y simplifique su respuesta

24.-) Encuentre el Dominio de la función:
24.1.-) $f(x) = \frac{2\,x + 1}{x^2 + x - 2}$
24.2.-) $g(x) = \frac{\sqrt[3]{x}}{x^2 + 1}$
24.3.-) $h(x) = \sqrt{4 - x} + \sqrt{x^2 - 1}$

25.-) Qué aspecto tiene cada una de las gráficas siguientes a partir de la gráfica de f
25.1.-) y = - $f(x)$
25.2.-) y = 2 $f(x) - 1$
25.3.-) y = $f(x - 3) + 2$

26.-) Sin usar calculadora haga un bosquejo de cada una de las siguientes gráficas
26.1.-) $y = x^3$
26.2.-) $y = (x + 1)^2$
26.3.-) $y = (x - 2)^3 + 3$
26.4.-) $y = 4 - x^2$
26.5.-) $y = \sqrt{x}$
26.6.-) $y = 2\sqrt{x}$

27.-) Sea $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & si\ x \leq 0 \\ 2x + 1 & si\ x > 0 \end{cases}$

27.1.-) Evalúe $f(-2) \quad \wedge \quad f(1)$

27.2.-) Trace la gráfica

28.-) Si $f(x) = x^2 + 2x - 1 \quad \wedge \quad g(x) = 2x - 3$ encuentre cada una de las siguientes funciones

28.1.-) $f \circ g$

28.2.-) $g \circ f$

28.3.-) $g \circ g \circ g$

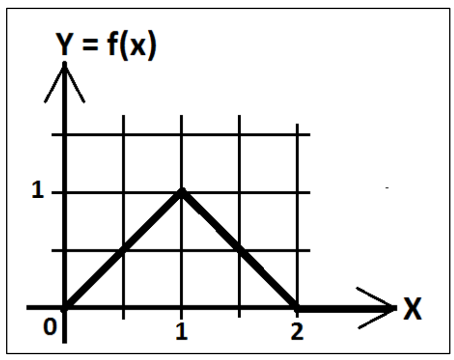
29.-) Al abrir un grifo de agua caliente, la temperatura T del agua depende de cuánto tiempo ha estado saliendo el agua. Dibuje un esbozo de gráfica de T como una función del tiempo t que ha transcurrido desde que fue abierto el grifo

30.-) Un contenedor rectangular sin tapa tiene un volumen de 10 m^3. La longitud de su base es dos veces su ancho. El material para la base cuesta \$10 por metro cuadrado, y el material para los lados cuesta \$6 por metro cuadrado. Exprese el costo de los materiales como una función del ancho de la base.

31.-) Encuentre el dominio de cada una de las siguientes funciones: $f(x) = \sqrt{x+2} \quad \wedge \quad g(x) = \frac{1}{x^2 - x}$

32.-) Una función f está definida por $f(x) = \begin{cases} 1 - x & si\ x \leq -1 \\ x^2 & si\ x > -1 \end{cases}$ evalúe $f(-2), f(-1) y\ f(0)$ y grafique la función.

33.-) Encuentre una fórmula para la función f graficada en la figura



34.-) Sea $f(x) = \begin{cases} 3x & si\ -1 \leq x \leq 0 \\ x^3 & si\ \quad 0 < x \leq 2 \end{cases}$

34.1.-) Es f inyectiva? Justifique demostrando si asegura que si lo es o con un contraejemplo si afirma que no lo es

34.2.-) Es f epiyectiva? Justifique demostrando si asegura que si lo es o con un contraejemplo si afirma que no lo es

34.3.-) Es f biyectiva?, si lo es encuentre f^{-1}

34.4.-) Grafique f^{-1}

35.-) Sea $f(x) = \frac{5x+3}{x-4}$

35.1.-) Determine el dominio de f

35.2.-) Determine el recorrido de f

35.3.-) Restringa el dominio y el recorrido (si es necesario) de tal modo que f sea biyectiva

35.4.-) Grafique f

35.5.-) Determine f^{-1}

35.6.-) Determine el dominio y el recorrido de f^{-1}

35.7.-) Grafique f^{-1}

FUNCIONES ELEMENTALES

Definiciones básicas: