INSTITUTO NACIONAL
Dpto. de Física

Nombre:____Curso:_________

GUÍA DE VECTORES 3° E. M. electivo

Magnitudes o Conceptos Escalares:

En el estudio de la Física encontramos conceptos o magnitudes tales como: el tiempo, masa, carga eléctrica, temperatura, energía, etc., que quedan completamente caracterizadas al indicar una cantidad o valor numérico y la unidad de medición. Ej. Masa, m = 4 kg; Longitud, l = 15 m; temperatura, t° = 25 °C , etc.

Al trabajar en el contexto de la Física clásica no relativista, con magnitudes de este tipo, usamos el álgebra de los números reales, lo que está de acuerdo con los experimentos. Dichas cantidades se llaman ***magnitudes escalares***

Magnitudes vectoriales o Conceptos Vectoriales:

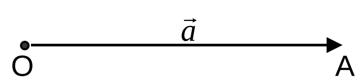
También en Física encontramos otros conceptos que para determinarlos completamente, se requiere conocer además de su magnitud o tamaño, su componente direccional, estos conceptos obedecen a reglas diferentes de las cantidades escalares. Dichos conceptos se llaman ***magnitudes vectoriales***. Ejemplo de conceptos vectoriales son:

i) Desplazamiento
ii) Velocidad
iii) Aceleración
iv) Fuerza
v) Torque
vi) Intensidad del campo eléctrico, etc.

Las cantidades vectoriales se representan gráficamente mediante un trazo dirigido (vector geométrico)

Los vectores geométricos están caracterizados por una magnitud o módulo, una dirección y un sentido.

El vector geométrico de origen O y extremo A se representa geométricamente así:



Simbólicamente el vector geométrico de origen O y termino A se anota OA o bien por $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$

Observación:
Todo vector geométrico queda determinado por tres elementos:

i) Módulo
ii) Dirección
iii) Sentido

I) Módulo:

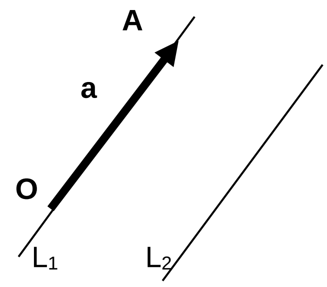
Corresponde a la longitud del trazo dirigido que representa al vector. El módulo del vector $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, se anota: $|\overrightarrow{OA}|$, $|\vec{a}|$ o a.

III) Sentido:

Esta dado por la orientación del trazo. AsÍ, por ejemplo el sentido del vector $\vec{a}$ es de O hacia A.

II) Dirección:

Está dada por la recta que lo contiene o por una paralela cualquiera a la misma. Así por ejemplo la dirección del vector $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ está dada por la recta L_1 que lo contiene o por la recta L_2 que es paralela a L_1.



Observación:

El módulo es siempre un **número positivo**. Si el módulo es cero, quiere decir que el origen del vector coincide con su término, es decir, el vector se reduce a un punto y por tanto no puede hablarse propiamente de vector, para facilitar muchas operaciones que veremos mas adelante, se dice que se trata del vector nulo o vector cero, y se representa por $\vec{0}$. No hay que confundirlo con el número cero, que no es un vector.

A excepción del vector nulo, todos los demás tienen dirección, sentido y módulo bien determinados.

Igualdad de vectores

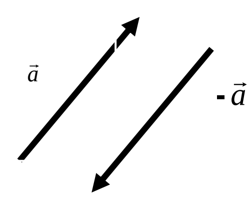
Definición:

Se dice que dos o más vectores son iguales si tienen igual módulo, dirección y sentido

Vectores inversos u opuestos

Definición:

Se dice que dos vectores son inversos, cuando tienen el mismo módulo la misma dirección, pero distinto sentido. Por ejemplo, los vectores $\vec{a}$ y $-\vec{a}$ son inversos.



Operaciones vectoriales

En esta guía se analizaran las siguientes operaciones vectoriales:

- Adición
- Producto de un vector por un escalar
- Producto punto
- Producto cruz

➢ Adición

Para sumar dos o más vectores estos deben ser de la misma clase o tipo, el vector resultante es otro vector que pertenece a la misma clase de los vectores sumados.

Propiedades de la adición de vectores

Sean los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ de la misma clase o tipo

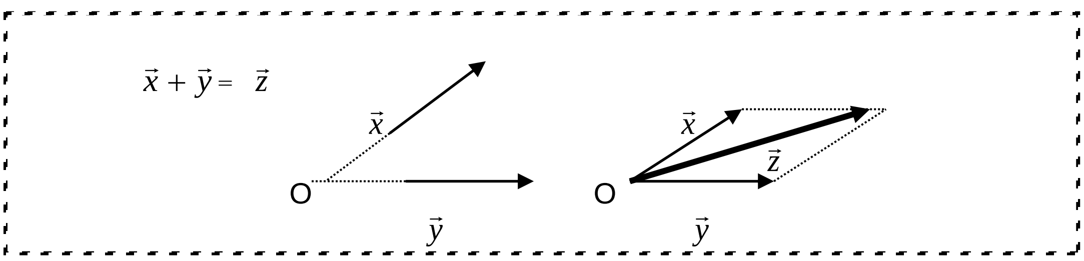
- $\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}$ propiedad de clausura
- $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ propiedad conmutativa
- $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ propiedad asociativa
- $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$ propiedad del neutro aditivo
- $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$ propiedad del inverso aditivo

Para sumar dos vectores gráficamente se puede usar dos métodos, el del paralelogramo y el del polígono.

Método del paralelogramo:

Para sumar dos vectores libres que se encuentran en el mismo plano, se trasladan siguiendo la línea hasta un origen en común O, después se procede a construir un paralelogramo y se traza una diagonal desde el origen hasta el vértice opuesto. Esta diagonal es el vector resultante de la suma por lo que tiene su origen también en O.

Ejemplo: Si se desea sumar los vectores $\vec{x}$ e $\vec{y}$ de la figura, ambos se trasladan hasta un origen común; $\vec{z}$ es la suma de $\vec{x}+\vec{y}$

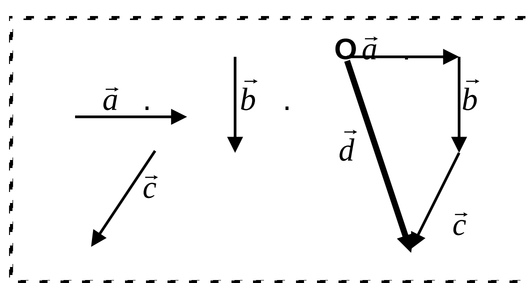


Este método se puede utilizar para sumar más de dos vectores, pero se debe ir asociándose de a dos en dos, por lo que en algunos casos es conveniente usar el método del polígono.

Método del polígono (triángulo):

Este método consiste en fijar un origen y trasladar el primer vector a sumar a ese punto coincidiendo su inicio con el origen fijado, después se procede a trasladar los vectores uno a continuación del otro, el vector resultante o suma tiene también su inicio en el origen fijado y su término en el extremo del último vector sumado.

Ejemplo: Para sumar los vectores $\vec{a}, \vec{b}$ y $\vec{c}$ de la figura, se fija $\vec{a}$ a un origen y a continuación se dibuja $\vec{b}$ y finalmente $\vec{c}$. La suma $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{d}$.

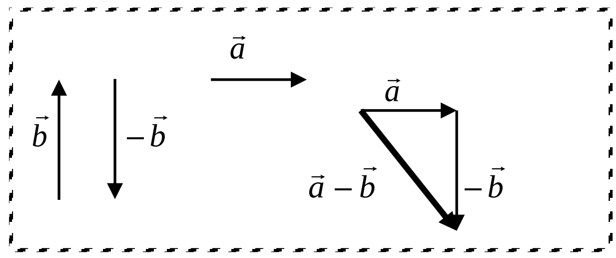


Sustracción

Definición:

La diferencia de dos vectores, $\vec{a} - \vec{b}$ **,** se define como la suma $\vec{a} + (-\vec{b})$ **,** donde $-\vec{b}$ ya sabemos que es el vector inverso de **b**.

Por ejemplo, en la figura está representada la diferencia $\vec{a} - \vec{b}$



- **Producto de un vector por un escalar (Ponderación de un vector)**

Definición:

La ponderación de un vector consiste en multiplicar un vector con un escalar. Cuando se pondera un vector el resultado es un vector, el cual no necesariamente es de la misma clase que el vector original. Se llama producto de un vector $\vec{a}$ por un escalar k, al vector que tiene la misma dirección que $\vec{a}$, el módulo es igual al producto entre k por el módulo de $\vec{a}$, y el sentido es igual al de $\vec{a}$ si k es positivo.

Si $\vec{a}$ es un vector y se pondera por el escalar 2, se obtiene el vector $2\vec{a}$ con la misma dirección y sentido de $\vec{a}$ y el módulo igual a dos veces al módulo de $\vec{a}$, (ver figura)

Propiedades del producto de un vector por un escalar

- $(m \bullet n) \bullet \vec{a} = m \bullet (n \bullet \vec{a})$
- $m \bullet (\vec{a} + \vec{b}) = m \bullet \vec{a} + m \bullet \vec{b}$
- $(m + n) \bullet \vec{a} = m \bullet \vec{a} + n \bullet \vec{a}$
- $1 \bullet \vec{a} = \vec{a}$

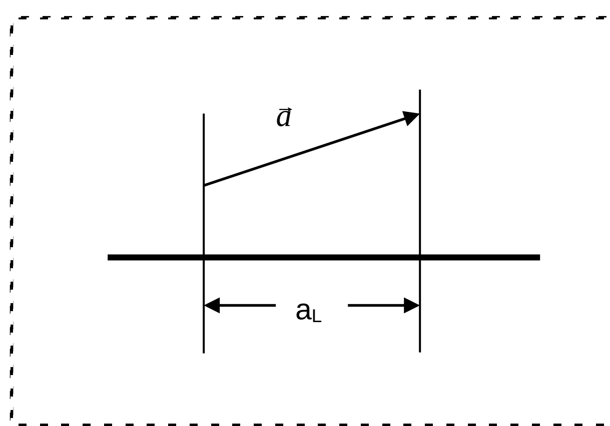
Vectores fijos a un sistema de referencia

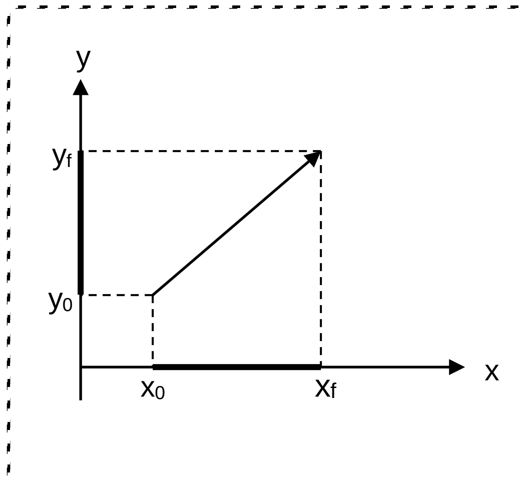
<u>Componentes de un vector</u>.

La proyección ortogonal de un vector sobre una recta es una cantidad que se denomina componente del vector (es un escalar).

Este se determina como la magnitud del segmento de la recta, comprendido entre dos rectas perpendiculares a ella (L), y que pasan por el origen y el término del vector.

En la figura adjunta a_L es la componente horizontal de $\vec{a}$





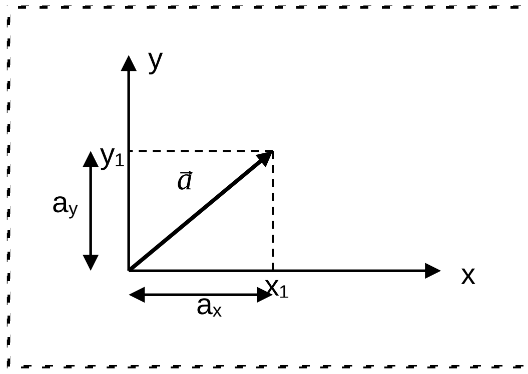
Vector en el plano cartesiano

Un vector puede definirse en un plano de coordenadas cartesiano, conformado por dos líneas perpendiculares denominadas ejes.

El eje horizontal se denomina abscisa y usualmente se representa por la letra x, el eje vertical se denomina ordenada y se representa por la letra y.

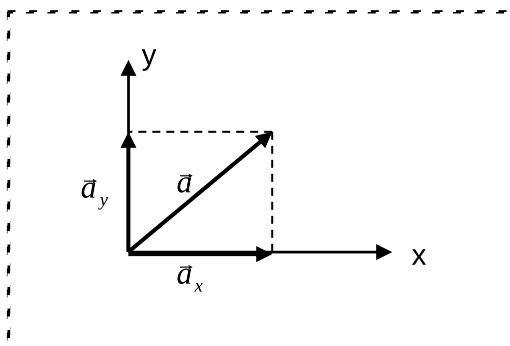
El dibujo muestra un vector dibujado en el primer cuadrante de este plano.

(x_1 –xo) es la componente del vector sobre el eje x. e (y_1 - yo) es la componente del vector sobre el eje y.



Vector en función de sus componentes cartesianas

Considere un vector libre en el plano X-Y, de modo tal que puede representarse con su origen en el origen del sistema de coordenadas cartesiano y cuyo termino es el par ordenado (a_x ; a_y), en este caso, el vector se fija a un origen de un sistema de referencia, por lo que si un vector que se encuentra en un plano cartesiano, este se puede representar mediante un par ordenado, es decir: $\vec{a} = (a_x ; a_y)$



Sus componentes rectangulares o cartesianas dan origen a dos vectores ficticios, que llamaremos vectores componentes, $\vec{a}_x$ y $\vec{a}_y$, tal que sumados tengan como resultado el vector $\vec{a}$

Vectores componentes:

$$\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y$$

Suma de vectores en función de sus componentes

Supongamos dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ en el plano X-Y, con $\vec{a} = (a_x ; a_y)$ y el vector $\vec{b} = (b_x ; b_y)$, la suma de los dos vectores se obtiene como la suma algebraica de las componentes de los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$, es decir, $\vec{R} = (R_x ; R_y)$, tal que:

$$\begin{array}{rl} & \vec{a} = (a_x ; a_y) \\ + & \vec{b} = (b_x ; b_y) \\ \hline & \vec{a} + \vec{b} = ((a_x + b_x) ; (a_y + b_y)) \end{array}$$

O también:

$$\vec{R}_x = (\vec{a}_x + \vec{b}_x) \;\; y \; \vec{R}_y = (\vec{a}_y + \vec{b}_y)$$

La resta es análoga a la suma, sólo que corresponde a una suma con inverso, es decir:

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$$

Multiplicación de un escalar por un vector

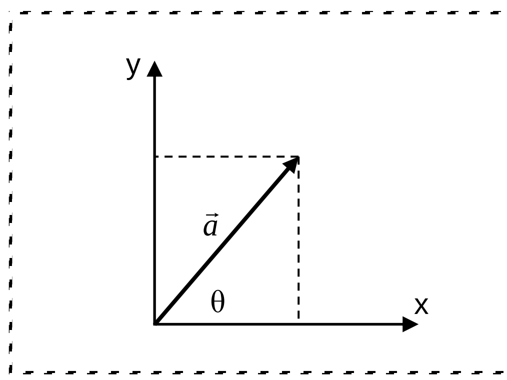
Sea α un escalar y $\vec{a}$ un vector en el plano X-Y, con $\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y$, siendo $\vec{R}$ el vector resultante el que se obtiene de la siguiente forma:

$$\alpha\vec{a} = \alpha\,(\vec{a}_x + \vec{a}_y) = (\alpha\,\vec{a}_x + \alpha\,\vec{a}_y)$$

por lo tanto; $\vec{R} = (\alpha\,\vec{a}_x + \alpha\,\vec{a}_y)$

Notación polar

Consideremos un vector $\vec{a}$ en el plano de coordenadas cartesianas, como se muestra en la figura



La dirección del vector se indica mediante el ángulo (θ) que se forma entre el semieje x positivo y el vector. La magnitud del vector corresponde al módulo del vector $\vec{a}$, es decir $|\vec{a}|$.

Por lo tanto para expresar un vector se requiere el módulo de él la componente direccional expresada mediante el ángulo. Lo anterior corresponde a la descripción en un plano.

$$\vec{a} = |\vec{a}|;\theta$$

La notación anterior recibe el nombre de vector polar y $|\vec{a}|;\theta$ corresponden a las coordenadas polares de $\vec{a}$

Determinación de las componentes rectangulares

Las componentes rectangulares del vector $\vec{a}$ en un plano, se pueden determinar usando las relaciones trigonométricas de coseno y seno, obteniéndose las siguientes expresiones:

$a_x = |\vec{a}| \cos\theta$ (Componente de $\vec{a}$ en el eje x)

$a_y = |\vec{a}|\, sen\,\theta$ (Componente de $\vec{a}$ en el eje y)

Por lo tanto el vector $\vec{a}$ queda expresado mediante sus componentes rectangulares de la siguiente forma:

$$\vec{a} = (\,|\vec{a}| \cos\theta;\; |\vec{a}|\, sen\,\theta)$$

Ejemplo:

Sea $\vec{a}$ = 5 ; 37° , encuentre sus componentes rectangulares

$a_x = |\vec{a}| \cos\theta$, reemplazando los valores se tiene:

$a_x = 5\cos 37$ = 5 · 0,8
$a_x = 4$
$a_y = |\vec{a}|\ sen\ \theta$, reemplazando los valores se tiene
$a_y = 5\ sen\ 37$ = 5 · 0,6
$a_y = 3$

Resp: . $\vec{a}$ = (4 ; 3)

Determinación de las coordenadas polares de un vector.

Si se requiere obtener las coordenadas polares del vector $\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y$, se debe determinar el módulo del vector y el ángulo θ.

El módulo del vector se obtiene mediante el teorema de Pitágoras:

$$|\vec{a}|^2 = a_x{}^2 + a_y{}^2$$

y el ángulo θ se obtiene mediante el arcotangente de él, es decir:

$\theta = \text{arctg}\ \dfrac{a_y}{a_x}$ o también $\theta = \text{tg}^{-1}\ \dfrac{a_y}{a_x}$

Ejemplo:

Dado el vector $\vec{b} = (8\,;\,6)$. Encontrar sus coordenadas polares.

$|\vec{b}|^2 = b_x{}^2 + b_y{}^2$, reemplazando los valores se tiene:

$$|\vec{b}|^2 = 8^2 + 6^2$$
$$|\vec{b}| = 10$$

$\theta = \text{tg}^{-1}\ \dfrac{b_y}{b_x}$ reemplazando se tiene que:

$$\theta = \text{tg}^{-1}\ \frac{6}{8}$$

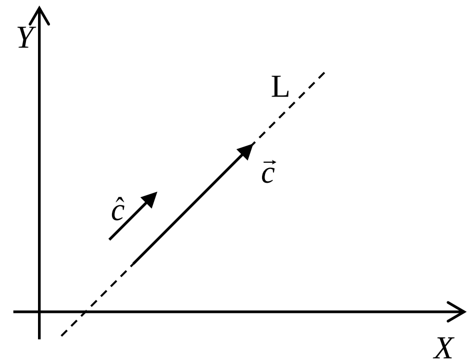
θ = 38,9º

Resp.: $\vec{b} = 10; 38{,}9^{\circ}$

Nota: Es recomendable dibujar previamente el vector en el plano cartesiano para saber en que cuadrante se encuentra para expresar el ángulo correctamente, ya que este siempre se mide a partir de la referencia.

Vectores unitarios

El vector unitario es un vector que siempre tiene tamaño igual a la unidad. En la figura se representa un vector $\vec{c}$ y un vector unitario $\hat{c}$ (c tongo), ambos vectores tiene igual dirección y sentido, pero $\hat{c}$ tiene tamaño igual a una unidad , es decir $|\hat{c}|$ = 1 μ



El vector unitario sirve para definir la dirección y sentido de un vector, ya que al ponderar el vector unitario por un escalar, se obtiene el vector final o requerido, es decir: $\vec{c} = |\vec{c}| \cdot \hat{c}$

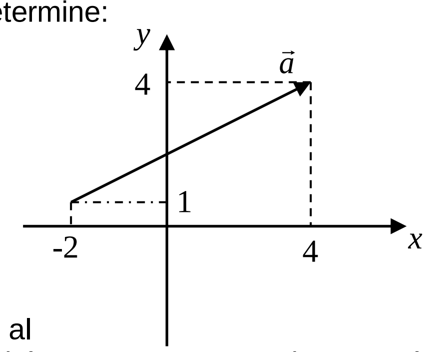
Si se quiere conocer el valor del vector unitario, este se obtiene dividiendo el vector por su respectivo módulo.

$$\boxed{\hat{c} = \frac{\vec{c}}{|\vec{c}|}}$$

Ejemplo:

Dado el siguiente vector dibujado en un plano cartesiano, determine:

i Las componentes rectangulares de $\vec{a}$:
ii El módulo de $\vec{a}$
iii El vector unitario de $\vec{a}$



i. El vector $\vec{a}$ tiene origen en el punto O= (-2;1) y su termino en el punto T = (4;4) , por tanto si lo fijamos al Sistema de coordenadas X/Y su valor será, termino del vector menos su origen, por lo tanto el vector tendrá; origen O" = (0;0) y termino el punto T = (6;3)

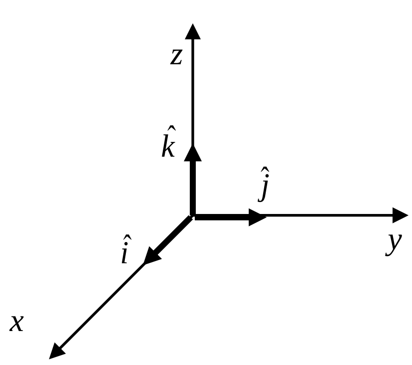
ii) El módulo del vector se obtiene con el teorema de Pitágoras:

$$|\vec{a}| = \sqrt{6^2 + 3^2} = \sqrt{45}$$

iii) El vector unitario de $\vec{a}$ se obtiene con la siguiente expresión

$$\vec{a} = \frac{(6;3)}{\sqrt{45}} = [\frac{6}{\sqrt{45}};\frac{3}{\sqrt{45}}]$$

Cuando se trabaja en un sistema de coordenadas ortogonal (x, y, z) se definen los siguiente vectores unitarios $\hat{i}$ ≡ (1;0;0) ; $\hat{j}$ ≡ (0;1;0) y $\hat{k}$ ≡ (0;0;1) , lo anterior significa que estos vectores se encuentra ubicados en cada uno de lo eje, $\hat{i}$ en x , $\hat{j}$ en el eje y , $\hat{k}$ en el eje z , (ver figura)



$$|\hat{i}| = |\hat{j}| = |\hat{k}| = 1$$

$$\hat{i} \perp \hat{j} \perp \hat{k}$$

- **Producto punto o producto escalar**

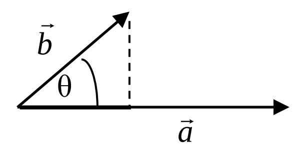
Con esta operación se toman dos elementos del conjunto de los vectores y mediante la operación punto se sale de este conjunto y se pasa al conjunto de los reales, obteniéndose como resultado un escalar.

El producto punto o producto escalar entre dos vectores, en su notación se representa mediante un punto (•).

El producto punto entre dos vectores se obtiene multiplicando los módulos de los vectores por el coseno del ángulo que se forma entre ellos, es decir:

$$\vec{a} \bullet \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos \theta;$$

Al efectuar un análisis gráfico del producto escalar, se concluye que el producto punto corresponde a la multiplicación de dos trazos, la magnitud del primer vector por la proyección del segundo vector sobre el primero



El tamaño de vector $\vec{a}$ es $|\vec{a}|$ y la proyección del vector $\vec{b}$ sobre $\vec{a}$ tiene un valor b cos θ, por lo que al efectuar el producto punto o producto escalar se esta multiplicando el tamaño de dos trazos y el resultado es un escalar.

Propiedades del producto punto:

- $\vec{a} \bullet \vec{b} = \vec{b} \bullet \vec{a}$ (conmutativo)
- $\vec{a} \bullet (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \bullet \vec{b} + \vec{a} \bullet \vec{c}$ (Distributividad)
- m ($\vec{a} \bullet \vec{b}$) = (m$\vec{a}$)•$\vec{b}$, donde m es una cantidad escalar.

<u>Determinación del producto escalar en forma analítica</u>

Sean $\vec{a}$ y $\vec{b}$ dos vectores expresado en coordenadas rectangulares con $\vec{a}$ = (a_x, a_y, a_z) y $\vec{b}$ = (b_x; b_y; b_z) en este caso la operación producto punto o escalar se define de la siguiente forma

$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z$; donde el resultado es un escalar.

Ejemplo:

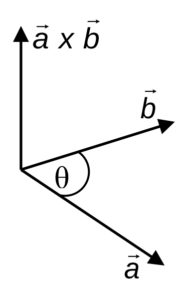
Se $\vec{a}$ = (3; 1) y $\vec{b}$ = (4; 4) dos vectores ubicados en el plano X/Y, el producto:

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 3 \cdot 4 + 1 \cdot 4 = 12 + 4 = 16$

- **<u>Producto vectorial o producto cruz</u>**

El producto vectorial de los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ es una operación definida en el algebra vectorial y como resultado es otro vector ($\vec{a} \times \vec{b}$) perpendicular al plano formado por los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$.

Dados los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$, se representa geométricamente el producto vectorial $\vec{a} \times \vec{b}$ como:



Su módulo se determina como:

$$\boxed{\left|\vec{a}\ x\ \vec{b}\right| = \left|\vec{a}\right| \left|\vec{b}\right| sen\theta}$$

Determinación del producto cruz en forma analítica

Si $\vec{a} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k} = (a_x, a_y, a_z)$

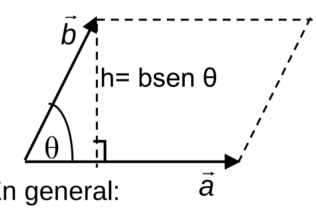
$\vec{b} = b_x\hat{i} + b_y\hat{j} + b_z\hat{k} = (b_x, b_y, b_z)$

Para obtener el producto vectorial expresado en forma analítico, es decir, a través de sus componentes, debemos desarrollar el siguiente determinante:

$$\vec{a}\ x\ \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

$$\vec{a}\ x\ \vec{b} = (a_y b_z - a_z b_y)\hat{i} - (a_x b_z - a_z b_x)\hat{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\hat{k}$$

Observación:
Matemáticamente, el producto vectorial de los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$, tiene un módulo igual al área del paralelogramo formado por los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$.

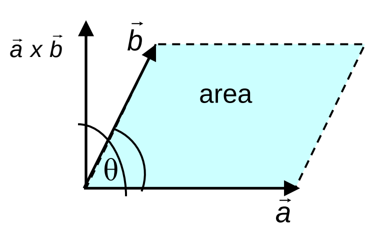


$Area_{\square}$ = base · altura = $\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right| sen\theta$

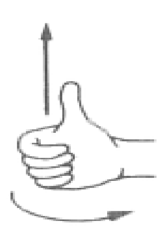
Por lo tanto:

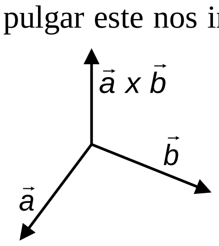
$Area_{\square} = \left|\vec{a}\ x\ \vec{b}\right|$

En general:



Para determinar la dirección y sentido del vector ($\vec{a}\ x\ \vec{b}$) se utiliza una regla llamada "regla de la mano derecha", que consiste en colocar la mano derecha extendida a lo largo del primer vector (según figura), en este caso del vector $\vec{a}$, luego se cierra la mano girando los dedos hacia el otro vector, en este caso hacia $\vec{b}$, al estirar el pulgar este nos indica la dirección y el sentido de ($\vec{a}\ x\ \vec{b}$)





Propiedades del producto vectorial

- $\vec{a}\ x\ \vec{b} = -\ \vec{b}\ x\ \vec{a}$
- $\vec{a}\ x\ \vec{a} = \vec{0}$
- $\vec{a}\ x\ (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a}\ x\ \vec{b} + \vec{a}\ x\ \vec{c}$

Ejemplo:

Dados los vectores $\vec{a} = (2\hat{i} + 3\hat{j} + 5\hat{k})$ u y $\vec{b} = (3\hat{i} + 8\hat{j} + 5\hat{k})$ u. Determine:

a) $\vec{a} \times \vec{b}$

b) el módulo de $\vec{a} \times \vec{b}$

c) el ángulo que forman los vectores entre sí (ángulo menor)

a)

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 8 & 5 \end{vmatrix} = (3 \cdot 5 - 8 \cdot 5)\ \hat{i} - (2 \cdot 5 - 5 \cdot 3)\ \hat{j} + (2 \cdot 8 - 3 \cdot 3)\hat{k}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \mathbf{(-25\hat{i} + 5\hat{j} + 7\hat{k})\ u}$$

b)

$$\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = \sqrt{(-25)^2 + (5)^2 + (7)^2}\ u$$

$$\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = \mathbf{26{,}44\ u}$$

c) Determinación del ángulo θ

Si $\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = \left|\vec{a}\right| \left|\vec{b}\right| sen\theta$

$$\Rightarrow sen\theta = \frac{\left|\vec{a} \times \vec{b}\right|}{\left|\vec{a}\right| \left|\vec{b}\right|} \qquad \text{(I)}$$

Donde:

$$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 5^2} = 6{,}2\ u$$

$$\left|\vec{b}\right| = \sqrt{3^2 + 8^2 + 5^2} = 9{,}9\ u$$

Reemplazando en la ecuación I, se tiene:

$$\Rightarrow sen\theta = \frac{26{,}44}{6{,}2 \cdot 9{,}9} = 0{,}431$$

$$\Rightarrow \theta = sen^{-1} 0{,}431$$

$\boldsymbol{\theta}$ **= 25,53º**

Guía de Aplicaciones Vectores

1) Las componentes rectangulares de un vector $\vec{v}$ son: v_x = 12u y v_y=5u. Determine el módulo y dirección del vector $\vec{v}$ respecto del eje x

2) Si la componente de un vector $\vec{m}$ en el eje x es m_x = 3.88 y la dirección del vector es 40°. Determine.

   a.) Módulo del vector
   b.) Las coordenadas rectangulares del extremo del vector si su origen es (0,0)

3) Dado un vector $\vec{d}$ de módulo igual a de 13 u de longitud que forma un ángulo de 22.6º con el eje x medido en sentido positivo, ¿Cuáles son sus componentes?

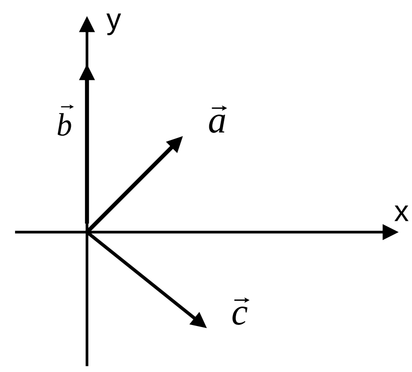
4) Un avión despega en un ángulo de 30° con la horizontal. La componente horizontal de su velocidad es 150 km/hr. ¿Cuánto vale la componente vertical de su velocidad?

5) Un bote a motor se dirige al norte a 20 km/h, en un lugar donde la corriente es de 8 km/h en la dirección Sur 70° Este. Encontrar la velocidad resultante del bote.

6) Un cartero viaja: 1/2 km al Este, 1/4 km al Norte, 3/4 km al Noroeste, 1/2 km a Sur, 1 km al Suroeste. Determine el desplazamiento resultante del cartero y el valor del ángulo, con respecto al eje de referencia (x).

7) Un nadador va a cruzar perpendicularmente un río cuya corriente tiene una rapidez de 3 km/h Si el nadador va a razón de 10 m/min, ¿Cuál es el módulo de su velocidad resultante?

8) Tres vectores de igual clase están orientados como se muestra en la figura, donde $\vec{a}$ =20u, 45°, $\vec{b}$ = 40u, y $\vec{c}$ = 30 u; 315°. si se efectúa la suma entre los tres vectores, encuentre:



   a.) las componentes rectangulares del vector resultante $\vec{R}$.
   b.) la magnitud y dirección del vector resultante.

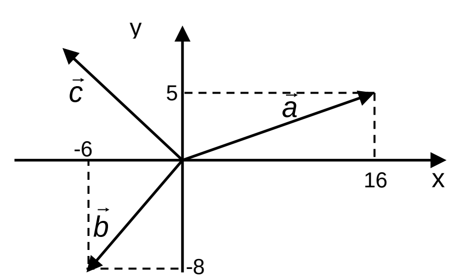
9) Dados los siguientes vectores::

   $\vec{a}$ = 30;20° , $\vec{b}$ = 40;120° , $\vec{c}$ = (2; 3), $\vec{d}$ =(2;- 5)

Efectué el producto punto y el producto cruz entre los vectores

   a.) $\vec{a}$ y $\vec{b}$
   b.) $\vec{c}$ y $\vec{d}$
   c.) $\vec{a}$ y $\vec{c}$

10) Dados los vectores $\vec{a}, \vec{b}$ y $\vec{c}$ de la misma clase, se suman entre sí. Determine las componentes del vector $\vec{c}$, para que el vector resultante sea cero.
    R: $\vec{c}$ = (-10; 3)



11) Se tienen los vectores $\vec{m} = m_x\hat{i} + m_y\hat{j}$, $\vec{n} = 8\sqrt{2}; 135º$ y $\vec{p} = (-2; -5)$. Al sumar estos vectores se obtiene el vector resultante $\vec{R} = 10; 37º$.. Determine el vector $\vec{m}$.
R. $\vec{m} = 18\hat{i} + 3\hat{j}$

12) Del problema anterior, determine la dirección de $\vec{m}$
R: θ = 9,47º

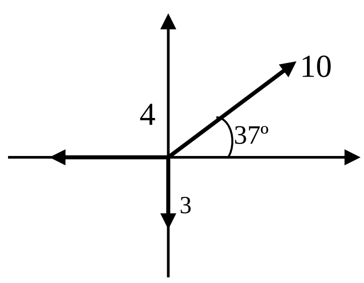
13) Un hombre y un joven tiran de un fardo que se encuentra sobre el suelo, aplicando fuerzas de 100 N y 80 N de módulo respectivamente. Si la fuerza que aplica el joven es paralela al suelo y las fuerzas forman entre ellas un ángulo de 37º. Calcular la fuerza resultante sobre el fardo.
R: 170,9 N; 20,55º

14) Dos fuerzas se aplican sobre un cuerpo en el mismo punto. Siendo $\vec{F}_1 = 3N; 60^o$ y $\vec{F}_2 = 5N; 0^o$. ¿Qué valor tiene la fuerza resultante sobre el cuerpo?
R: $(6{,}5\hat{i} + 2{,}6\hat{j})$ N

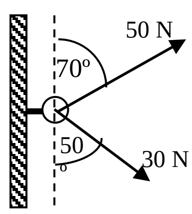
15) En un bote se intenta cruzar perpendicularmente un río cuya corriente tiene una velocidad 15 km/h hacia el Este. Si el bote sale del embarcadero con una velocidad constante de 20 km/h hacia el Norte. ¿Cuál es la velocidad resultante del bote, con relación al embarcadero?
R: 25 km/h; E 53,13º N

16) Se tienen dos vectores de módulos 600 N y 800 N y al efectuar la sustracción entre ellos se obtiene un vector resultante de 1000 N, ¿qué valor tiene el ángulo formado por ellos?
R: 90º

17) En el esquema se muestran tres vectores ubicados en un sistema de coordenadas cartesianas con sus respectivos módulos. Calcule el módulo del vector resultante.
R: 5



18) Sobre una argolla fija en la pared, se aplican dos fuerzas, según figura. ¿Cuál es el módulo de la fuerza resultante?
R: 70 N



19) El ángulo entre dos fuerzas es 74º, y cada fuerza tienen módulos iguales de 25 N. Calcule el módulo de la fuerza resultante.
R: 40 N

20) El torque es una magnitud física vectorial que se define como $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$, siendo $\vec{r}$ el vector posición en cuyo extremo se aplica una fuerza $\vec{F}$. Si a un cuerpo se le aplica una fuerza $\vec{F} = (5\hat{i} + 2\hat{j})$ N en una posición $\vec{r} = (6\hat{i} + 8\hat{j})$ m. Calcular:

a) $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$

b) $\left|\vec{r} \times \vec{F}\right|$

c) el ángulo que forman $\vec{r}$ y $\vec{F}$

R: a) $-28\hat{k}$ N·m b) 28 N·m c) $\theta = 31{,}29^o$