Instituto Nacional
Depto. De Física
Prof. A. Scapini ref: Lanzamiento de proyectil

Nombre:……………………………………………………………………………. Curso:……………………….

Movimiento de proyectiles.

Introducción.-

Lanzamiento Parabólico:

Una de las aplicaciones importantes de los movimientos con aceleración constante, es el movimiento parabólico o movimiento de un proyectil, tal como lo muestra la figura # 1.

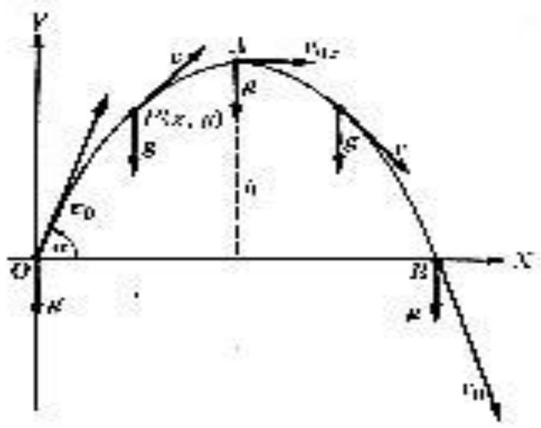


Figura 1: Movimiento Parabólico

Para analizar este movimiento lo realizaremos en dos dimensiones, primero en el eje X y luego en el eje Y, que corresponde a la combinacion de los movimientos en el plano X-Y .

El primero es un movimiento en el cual no existe fuerza neta, es decir corresponde a un movimiento rectilíneo y uniforme y el segundo movimiento corresponde a un movimiento vertical con aceleración constante de tamaño $g = 9{,}8\ m \cdot s^{-2}$ donde la fuerza neta existe y corresponde al peso del cuerpo, en la figura N° 2 se muestra la posición del cuerpo en los eje anteriores.

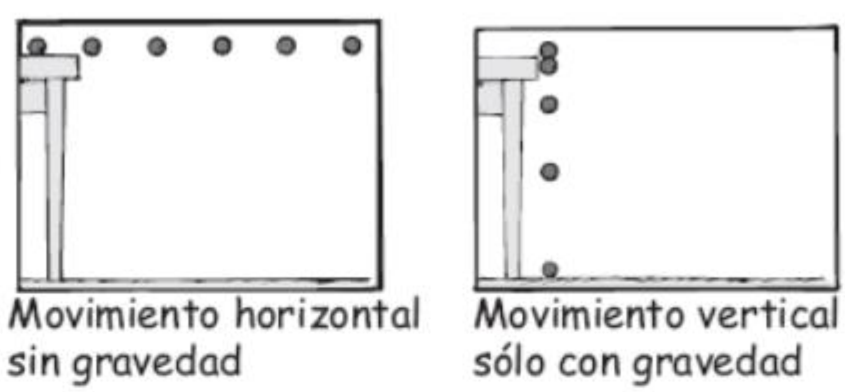


Fig.# 2

Para estudiar ese movimiento compuesto debemos:

- Reconocer cada uno de los movimiento por eje
- Aplicar a cada uno de los movimientos sus propias ecuaciones
- El tiempos empleado corresponde a cualquiera de los dos movimientos, el uniforme eje X, y el variado con aceleración constante en el eje Y

Las ecuaciones que nos permiten analizar el moviendo parabólico son las siguientes,

La ecuación itinerario, donde $\boldsymbol{r_0}$ da la posición en el tiempo t_0.

$$x = x_0 + \vec{v}_0(t - t_0) + \frac{1}{2}\vec{a}(t - t_0)^2, \quad \text{Ec \# 1}$$

La ecuación de rapidez es

$$v = v_0 + \vec{a}(t - t_0) \quad \text{Ec \# 2}$$

Y por último la ecuación de aceleración es

$$a = ctte, \; g = 9{,}8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \quad \text{Ec \# 3}$$

Uno de los usos más interesantes de estas ecuaciones es su aplicación al movimiento de un proyectil. Escogeremos el plano *X-Y* coincidente con el plano de movimiento del proyectil, el eje X es horizontal y el eje Y es verticalmente, el origen del sistema de referencia concuerda con el origen del sistema de coordenada, ver figura # 1. Entonces

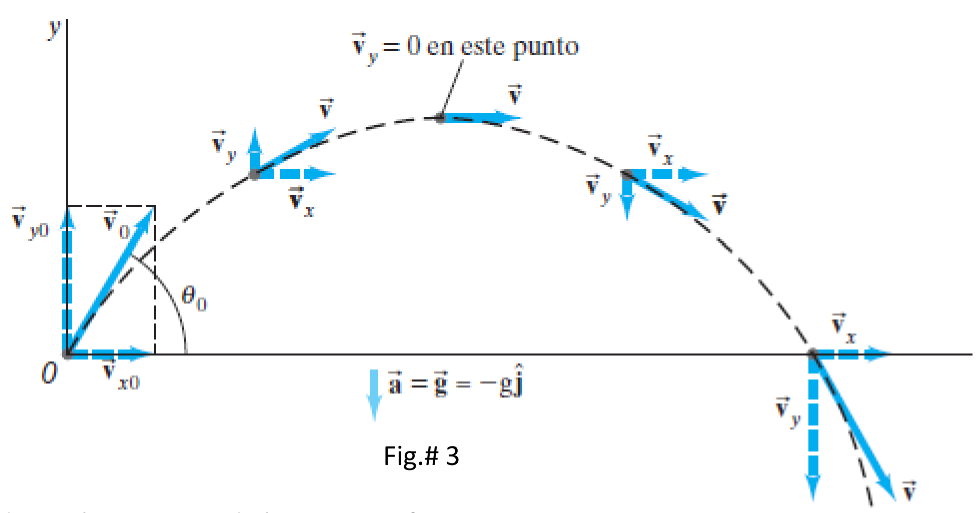


Fig.# 3

La velocidad inicial se expresa de la siguiente forma

$$\vec{v}_0 = v_{0x}\hat{i} + v_{0y}\hat{j},$$

Donde $v_{0x} = v_0 \cos\alpha, v_{0y} = v_0 \sin\alpha$

La ecuación de velocidad para cualquier tiempo, puede escribir en la siguiente forma (si $t \neq 0$)

$$\vec{v}_{(t)} = v_{x(t)}\hat{i} + v_{y_{(t)}} j$$

Con: $v_x = v_{0x}$ $\qquad v_{y(t)} = v_{0y} - gt$

Las relaciones anteriores indican que la componente v_x *de* ***la velocidad*** *en la dirección X* *permanece constante*, ya que no hay aceleración en dicha dirección.

Similarmente, la ec. (1) con $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j}$

con $x = v_{0x}t$; $y = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2$, y $v_{0x} = v_0 \cos\alpha, v_{0y} = v_0 \sin\alpha$

$$\vec{r} = (v_0 \cos\alpha)t\hat{i} + ((v_0 \, sen\,\alpha)\, t - \frac{1}{2} g t^2)\hat{j} \quad \text{Ec \# 1 completa}$$

La relación anterior da las coordenadas de posición de la partícula en función del tiempo.

El tiempo requerido para que la partícula alcance la máxima altura en el punto *A(tiempo máximo)* (ver figura # 1) se encuentra haciendo $v_y = 0$ en las ecuaciones ya que, en aquel punto, la velocidad de la partícula tiene sólo componente en la dirección horizontal.

$$t_{máx} = \frac{v_{0y}}{g} \quad ó \quad t_{máx} = \frac{v_0 sen\alpha}{g}. \qquad \text{(ec \# 4)}$$

La máxima altura *h* se obtiene

$$h_{máx} = \frac{{v_{0y}}^2}{2g} \qquad h_{máx} = \frac{v_0^2 sen^2\alpha}{2g}.$$

(ec# 5)

El tiempo necesario para que la partícula retorne al nivel del suelo, se denomina *tiempo de vuelo*, El tiempo de vuelo es el doble del tiempo máximo (ec. # 4.)

El *alcance* horizontal se obtiene sustituyendo el tiempo de vuelo en la componente r_x del vector posición.

$$x = v_{0x} \cdot 2\, t_{máx} \qquad x = v_{0x}\frac{2v_0 sen\alpha}{g} = \frac{2v_0^2 sen\alpha\cos\alpha}{g} \quad ó \quad x = \frac{v_0^2 sen2\alpha}{g} \qquad \text{ec \# 5}$$

Nota: El alcance es máximo para $\alpha = 45^\circ$.

La ecuación de la trayectoria se obtiene sustituyendo el tiempo *t* entre las dos componentes de la posición ec # 1 completa, obteniéndose la siguiente relación: $y = -\frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}x^2 + x\cdot tg\alpha$,

la cual es la ecuación de una parábola, ya que tanto $tg\alpha$ como el coeficiente de x^2 son constantes.

Los resultados que hemos obtenido son válidos cuando:

(1) El alcance es suficientemente pequeño como para despreciar la curvatura de la tierra.

(2) La altura es suficientemente pequeña como para despreciar la variación de la gravedad con la altura.

(3) La velocidad inicial del proyectil es suficientemente pequeña para despreciar la resistencia del aire. Por último, si tenemos en cuanta la resistencia del aire, la trayectoria deja de ser parabólica, como se muestra en la figura # 4 y el alcance disminuye.

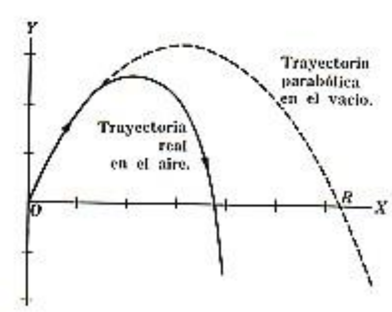


figura # 4

APLICACIONES

1. Un helicóptero se desplaza horizontalmente con una rapidez de 40 m/s a 1125 m del suelo. Si un objeto se cae del helicóptero, calcular:
   a) Tiempo que demora en tocar el suelo
   b) El módulo de la velocidad a los 4 s de haber caído
   c) La velocidad con que toca el suelo
   d) El alcance horizontal.

Instituto Nacional
Depto. De Física
Prof. A. Scapini ref: Lanzamiento de proyectil

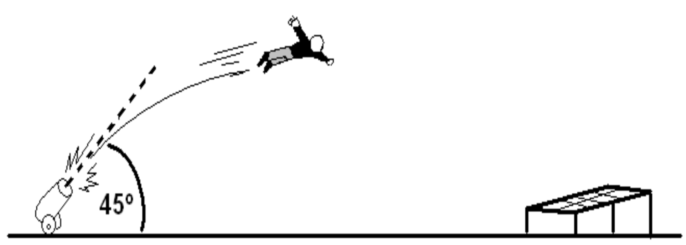
2. En un bar local, un cliente desliza un vaso de cerveza vacío sobre el mostrador para que el cantinero lo vuelva a llenar. El cantinero está distraído y no ve el vaso que se desliza por el mostrador y golpea el piso a 1,4 m de la base del mostrador. Si la altura del mostrador es de 0,86 m.
   a) ¿con qué velocidad sale el vaso del mostrador? R: 3,34 m/s; 0°
   b) ¿Cuál fue la dirección (ángulo) del vaso justo en el instante de golpear el suelo? R: 309°

3. Se lanza un proyectil con una velocidad de 80 m/s, que forma un ángulo de 45º con la horizontal. Determinar las coordenadas de posición y componentes rectangulares de la velocidad en los instantes.
   a) 0 (s) b) 3 (s) c) 6,3 (s) d) 11,2 (s)

4. Se lanza un proyectil con velocidad de 50 m/s que forma un ángulo de 30º. Determinar:
   a) El tiempo que tarda en alcanzar la altura máxima. R: 2,5 s
   b) Tiempo total hasta que vuelve a tocar el suelo. R: 5,0 s
   c) Altura máxima. R: 31,25 m
   d) Alcance máximo horizontal R: 216,5 m

5. Se dispara un proyectil desde una cornisa de un edificio que se encuentra a 180 m de altura. Si su velocidad inicial es de 60 m/s a 60º respecto a la horizontal, determinar:
   a) ¿Cuánto tiempo demora en alcanzar su máxima altura? R: 5,2 s
   b) ¿Cuánto es la altura máxima que alcanza? R: 314,99 m
   c) ¿Cuánto tiempo tarda desde el punto más alto hasta el suelo? R: 7,94 s
   d) ¿Cuál es el alcance? R: 394,2 m

6. En un show circense, el Hombre Bala ingresa en un cañón el cual está orientado 45º respecto del suelo. Si la rapidez con que salen los objetos lanzados por ese cañón es de 30[m/s], determine la distancia (medida desde el cañón) en la cual debe colocarse la malla de seguridad que recibirá al Hombre Bala luego de ser lanzado por el cañón.



7. Se dispara un proyectil desde el nivel del suelo con una velocidad $\vec{v} = (12\,\hat{\imath} + 24\hat{\jmath})$ m/s.
   a) ¿Cuáles son las componentes rectangulares de la velocidad a los 4 s de iniciado el movimiento? R: $(12\,\hat{\imath} - 15{,}2\hat{\jmath})$ m/s
   b) ¿Cuáles son las coordenadas de posición cuando el proyectil alcanza su máxima altura? R: (29,4; 29,4) m

8. Se ha dicho que en su juventud, George Washington lanzó un dólar de plata de una orilla de un río al a la otra orilla. Suponiendo que el río tenía un ancho de 75m y que Washington lanzó el dólar desde una altura de 1,5 m del suelo,
   a) ¿Qué rapidez mínima inicial fue necesaria imprimirle a la moneda para que llegará a la otra orilla?
      R: 26,8 m/s
   b) ¿Cuánto tiempo estuvo en el aire la moneda? R: 3.9 s

9. Durante la primera guerra mundial, los alemanes tenían un cañón llamado Big Bertha que se usó para bombardear París. La bala del cañón salía con una rapidez inicial de 1700 m/s a una inclinación de 55° con la horizontal. Para dar en el blanco se hicieron algunos ajustes para considerar la resistencia del aire y otros efectos,
   a) ¿A qué distancia de la posición de lanzamiento da en el blanco? R: 277 km
   b) ¿Cuánto tiempo estuvo la bala en el aire? R: 284 s

10. Se dispara un proyectil de tal manera que su alcance horizontal es igual al triple de su altura máxima. ¿Cuál es el ángulo de lanzamiento? R: 53,1°